

RIGENERAZIONE AUTOMATICA DELLA MESH PER LA MODELLAZIONE DELLA PROPAGAZIONE DEL CRACK NELL'AMBITO DEL METODO DELLE CELLE

E. FERRETTI

DISTART – Scienza delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria, Bologna

SOMMARIO

Viene proposta una tecnica di aggiornamento automatico della mesh per lo studio di problemi di propagazione piana del crack nell'ambito del Metodo delle Celle [1]. Questa tematica si inserisce in uno studio di più ampio respiro [2], volto a testare l'applicabilità del Metodo delle Celle in analisi strutturale. In quest'ottica, il presente lavoro non comprende un confronto con altri metodi già consolidati (per es. Metodo agli Elementi Finiti).

Introdotta un criterio di crisi adeguato al materiale in studio, il criterio di propagazione del crack si avvale di una procedura di (a) svincolamento nodale, (b) aggiornamento della geometria del crack e (c) rigenerazione automatica della mesh. L'approccio di identificazione della direzione di propagazione "intra-element" del crack parte dallo studio dello stato tensionale nell'intorno finito del tip e passa attraverso il significato fisico correlato alla mesh duale di cui si avvale il Metodo delle Celle. L'utilizzo di un generatore di mesh adattivo permette di raffinare il risultato nell'intorno del tip con la precisione desiderata.

Si presentano i risultati relativi all'applicazione della tecnica proposta per problemi di propagazione del crack in solidi di calcestruzzo in Modo I ([2], [3]) e in Modo Misto ([2], [4]).

ABSTRACT

An automatic remeshing technique for studying plane crack propagation problems with the Cell Method [1] is proposed. This theme is part of a more comprehensive study [2], which intends to test the applicability of the Cell Method in structural analysis. Since this is its aim, the present work does not present any comparison between The Cell Method and other already consolidated methods (e.g. Finite Element Method).

Once a failure criterion has been introduced, which is adequate to the material in studying, the crack propagation criterion uses a procedure of (a) nodal releasing, (b) crack geometry updating, and (c) automatic remeshing. The identification approach of the "intra-element" crack propagation direction starts from the study of the stress field in the tip neighbourhood, and passes through the physical meaning linked to the dual mesh of the Cell Method. An adaptive mesher leads to a tip response, which can be refined with the desired precision.

Results concerning the application of the proposed technique for crack propagation problems in concrete solids in Mode I ([2], [3]) and in Mixed Mode ([2], [4]) are presented.

1. INTRODUZIONE

La maggiore difficoltà nel modellare la propagazione di una frattura (crack) in analisi numeriche basate su discretizzazioni spaziali del dominio (mesh) viene dal fatto che la geometria della mesh si modifica man mano che il crack si propaga. Questo problema viene risolto dai codici agli Elementi Finiti per mezzo di due strategie alternative: la prima descrive il crack come una brusca caduta di tensione normale, dovuta all'evoluzione del danneggiamento all'interno del materiale ([5], [6]); la seconda rappresenta il crack come una discontinuità nel campo degli spostamenti, descritta dalle componenti di spostamento relativo delle sue labbra. Poiché questo secondo approccio richiede rigenerazione della mesh (remeshing), molti autori hanno sviluppato tecniche innovative per simulare la propagazione del crack all'interno di una mesh agli Elementi Finiti: a tal proposito, si possono citare il meshless method [7], l'element-free Galerkin method [8], l'arbitrary local mesh replacement method [9], il boundary element method e il nodal relaxation [10]. In particolare, il nodal relaxation consiste in uno svincolamento progressivo dei nodi della mesh interessati dal crack e può essere ottenuto in due modi: si parla di propagazione inter-element se il crack viene fatto propagare lungo le direzioni corrispondenti ai lati degli elementi della mesh; si parla, invece, di propagazione intra-element se la direzione di propagazione viene stabilita per mezzo di un criterio di propagazione, indipendentemente dalla forma degli elementi. La prima tecnica è più veloce della seconda, dal momento che evita la fase di remeshing, ma è meno accurata e può andare incontro a problemi di biforcazione.

Nel presente lavoro, si segue una strategia con propagazione intra-element, abbinata a remeshing automatico. Questa tecnica è stata utilizzata per implementare il Metodo delle Celle in un codice di calcolo per l'analisi di solidi fessurativi [2].

Lo scopo di questo lavoro non è tanto quello di discutere gli aspetti salienti della Meccanica della Frattura, quanto quello di mostrare come un codice basato sul Metodo delle Celle possa fornire analisi accurate del processo di propagazione del crack nel calcestruzzo. Si giustifica, in quest'ottica, l'utilizzo di un criterio di crisi relativamente semplice qual è il criterio di Mohr/Coulomb. Per lo stesso motivo, viene presa in considerazione solo l'interpolazione lineare, e non quella quadratica [11], del Metodo delle Celle.

Per quanto detto, la capacità di un codice di riprodurre il cambiamento di topologia di una mesh è di primaria importanza nello studio numerico della propagazione di un crack. Ne viene che l'originalità di questo lavoro consiste tanto nel presentare i risultati di una delle prime implementazioni del Metodo delle Celle per solidi fessurativi, quanto nel proporre una tecnica di remeshing capace di tener conto delle modificazioni alla topologia della mesh.

2. IL METODO DELLE CELLE: GENERALITÀ

Il metodo delle Celle è un nuovo metodo numerico per la soluzione delle equazioni di campo [1]. L'essenza di questo metodo è fornire una formulazione finita diretta delle equazioni di campo, senza passare attraverso la formulazione differenziale.

La formulazione differenziale necessita di funzioni di campo dipendenti dal punto e dall'istante. Quindi, se non già direttamente funzione del punto e dell'istante, le funzioni di campo vengono ottenute dalle quantità globali avvalendosi delle nozioni di densità e di passaggio al limite. Ciò viene fatto nell'intento di formulare le equazioni di campo in forma esatta ma, di fatto, si ottengono equazioni che sono direttamente risolvibili solo per una ristretta classe di problemi. Per ottenere la soluzione nel caso più generale, qualsiasi metodo

basato sulla formulazione differenziale richiede una discretizzazione delle equazioni differenziali, portando ad una soluzione che è approssimata in ogni caso.

Abbandonando la formulazione differenziale e la necessità di utilizzare funzioni del punto, il Metodo delle Celle deriva direttamente le equazioni del campo in forma discreta, senza dover far ricorso ad operazioni di passaggio al limite. Presupposto fondamentale di questo metodo è l'utilizzo di variabili globali, al posto delle funzioni di campo della formulazione differenziale. Le variabili globali sono riferite non solo ai punti, ma anche alle linee, alle superfici e ai volumi: sono funzioni di dominio e non funzioni del punto.

Nella sua prima formulazione, l'interpolazione lineare, il Metodo utilizza discretizzazioni del dominio in semplici sufficientemente piccoli da potersi considerare uniformi i campi tenso-deformativo e omogeneo il materiale. Questa ipotesi non è assolutamente limitativa per l'analisi tenso-deformativa, per le leggi costitutive o per le condizioni di equilibrio. Infatti [1]:

- il teorema di Stokes-Helmholtz, che scompone la deformazione in una traslazione, una rotazione ed una deformazione pura, è valido in regioni a deformazione uniforme e non richiede dimensioni infinitesime della regione stessa;
- la relazione di Cauchy, che mette in relazione la forza di superficie con l'elemento piano di superficie attraverso il tensore degli sforzi, è valida, per campi di tensione uniformi e forze di volume nulle, indipendentemente dalle dimensioni della regione;
- le leggi costitutive vengono sperimentate su regioni a tensione e deformazione uniforme e su provini omogenei;
- l'equilibrio deve valere in ogni porzione del corpo e non solo in regioni infinitesime.

Se ne deduce, pertanto, come non sia assolutamente necessario fare ricorso alla nozione di derivata per lo studio dei solidi deformabili.

Il Metodo delle Celle utilizza due complessi di celle, l'uno duale dell'altro. Tutte le variabili fisiche sono associate, con coerenza, agli elementi geometrici di uno dei due complessi. In particolare, le variabili di sorgente, statiche e dinamiche, sono riferite agli oggetti del complesso detto duale, mentre le variabili di configurazione, geometriche e cinematiche, sono riferite agli oggetti del complesso detto primale. La conservazione dell'equilibrio viene imposta sul poligono duale di ogni vertice del complesso primale.

Si può mostrare [1] che, usando funzioni di forma lineari sui complessi simpliciali, la matrice di rigidità che si ottiene col Metodo delle Celle coincide con la matrice di rigidità che si ottiene col Metodo agli Elementi Finiti. Le due matrici di rigidità continuano a coincidere in presenza di sorgenti uniformemente distribuite sul dominio. Nel caso di sorgenti non uniformemente distribuite sul dominio, e quindi per le matrici di massa in dinamica, la coincidenza non sussiste più. Infatti, mentre negli Elementi Finiti una forza concentrata viene distribuita ai nodi tramite la regola della leva, nel Metodo delle Celle la sorgente concentrata viene attribuita interamente al poligono duale che ne contiene il punto di applicazione.

3. DIREZIONE DI PROPAGAZIONE DEL CRACK

La direzione di propagazione del crack può essere ottenuta per mezzo di vari criteri ([12]÷[19]). In questo lavoro, la direzione di propagazione è derivata direttamente dalle proprietà del polo di Mohr. Ovvero, poiché il polo di Mohr gode della proprietà secondo la quale una retta condotta per esso ha come secondo punto di intersezione con il circolo di Mohr il punto tensione relativo alla giacitura la cui traccia è parallela alla retta tracciata [20], la direzione di propagazione può essere individuata, con riguardo al circolo massimo dell'arbelo di Mohr, tracciando la retta congiungente il polo di detto circolo con i punti di

tangenza tra il circolo e le rette limite nel piano di Mohr. Nel caso particolare di propagazione piana del crack, oggetto di questo studio, il circolo massimo dell'arbelo è quello formato dai punti tensione relativi alle giaciture la cui traccia è contenuta nel piano del crack.

In questo caso, dette σ e τ , rispettivamente, la componente normale, positiva se di trazione, e tangenziale totale dello sforzo agente sulla generica giacitura dell'intorno piano del tip, la propagazione del crack si verifica quando (criterio di Mohr/Coulomb):

$$|\tau| = c - \sigma \tan \varphi, \quad (1)$$

dove c e φ sono costanti del materiale.

Quindi, per poter utilizzare il criterio di Mohr/Coulomb, è necessario conoscere il campo tensionale nell'intorno piano del tip. A tal fine, si è sfruttata l'associazione tipica del Metodo delle Celle tra campo tensionale ed elementi geometrici del complesso duale (§2).

Per poter sfruttare questa associazione, si è fissata a priori la forma della mesh primale nella zona circostante il tip [3], in modo da ottenere un poligono di Voronoi abbastanza regolare centrato sul tip. La forma voluta è stata ottenuta introducendo il nocciolo esagonale mostrato in Fig. 1: tramite un'opportuna definizione della desiderata dimensione della mesh in corrispondenza dei vertici di tale nocciolo, il generatore di mesh origina una prima mesh a maglia triangolare (mesh di Delaunay) adagiando gli elementi sui lati del nocciolo, che risulta così suddiviso in triangoli equilateri; successivamente, nel generare la seconda mesh a partire dai circocentri della prima mesh (mesh di Voronoi), il generatore di mesh origina il poligono di Voronoi campeggiato in grigio in Fig. 1, che soddisfa i richiesti requisiti di regolarità. Nella rimanente zona del dominio, la mesh viene generata automaticamente dal generatore di mesh.

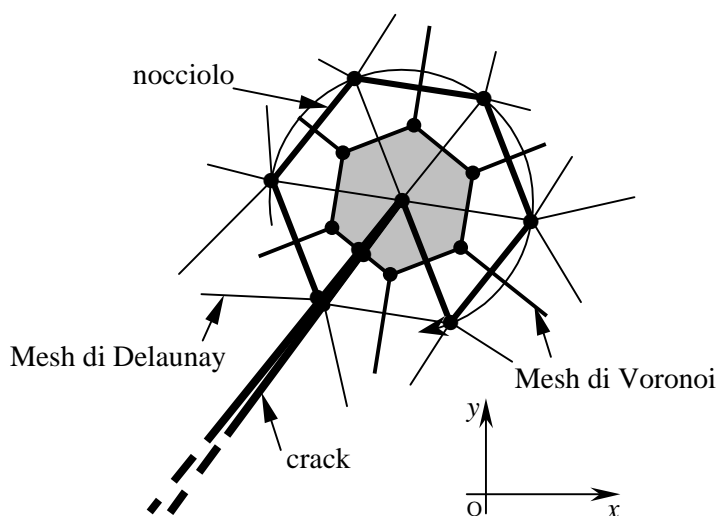


Fig. 1: Nocciolo esagonale inserito in corrispondenza del tip e conseguente risposta del generatore di mesh

4. ANALISI NEL PIANO DI MOHR

Le forze $\underline{\underline{Q}}_a^V$ che agiscono sul generico lato di Voronoi, a , hanno le stesse componenti nel sistema di riferimento globale x/y e nel sistema di riferimento locale traslato \bar{x}/\bar{y} (Fig. 2).

Detto ϑ l'angolo formato dal lato di Voronoi a con l'asse \bar{x} (Fig. 2), si può proiettare la forza $\underline{\underline{Q}}_a^V$ perpendicolarmente e parallelamente ad a per mezzo della matrice $\underline{\underline{T}}_a$ così definita:

$$\underline{T}_a = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}, \quad (2)$$

ottenendo la rappresentazione di $\underline{\tilde{Q}}_a^V = \begin{bmatrix} Q_{a\tilde{x}}^V & Q_{a\tilde{y}}^V \end{bmatrix}^T$ nel sistema di riferimento locale \tilde{x}/\tilde{y} :

$$\underline{\tilde{Q}}_a^V = \underline{T}_a \underline{Q}_a^V. \quad (3)$$

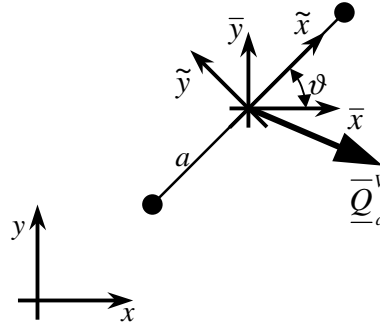


Fig. 2: Sistemi di riferimento globale e locali per il generico lato di Voronoi.

Infine, per ottenere il vettore le cui componenti rappresentano lo sforzo tangenziale e normale su a , $\underline{t}_a^V = \begin{bmatrix} \tau_a^V & \sigma_a^V \end{bmatrix}^T$, occorre dividere $Q_{a\tilde{y}}^V$ e $Q_{a\tilde{x}}^V$ per l_a , lunghezza del lato a :

$$\underline{t}_a^V = \frac{1}{l_a} \underline{\tilde{Q}}_a^V. \quad (4)$$

Per costruire il circolo di Mohr è sufficiente conoscere 2 punti tensione, ovvero, è sufficiente conoscere lo stato tensionale su 2 giaciture nell'intorno del tip. Poiché per ogni posizione del nocciolo esagonale vengono restituite le componenti di tensione su 3 giaciture, il problema di identificazione si può ritenere risolto per rotazione generica del nocciolo esagonale. Tuttavia, un'analisi della convergenza numerica [2] ha mostrato che le 2 giaciture che ottimizzano il risultato sono quelle inclinate a 30° e 60° . Pertanto, si è deciso di utilizzare 2 diverse posizioni del nocciolo, scelte in modo da restituire, l'una, una giacitura inclinata a 30° e, l'altra, una giacitura inclinata a 60° (Fig. 3a e Fig. 3b). Calcolate le coordinate dei corrispondenti 2 punti tensione e considerando che questi stessi punti sottengono ad angoli al centro doppi rispetto a quelli formati dalle giaciture cui sono riferiti [20], il codice calcola:

- il raggio R del circolo di Mohr;
- le coordinate del centro del circolo di Mohr;
- la distanza d tra il centro del circolo di Mohr e le rette limite;
- la posizione del polo di Mohr.

Per tener conto del fatto che l'analisi numerica viene condotta su di un intorno finito del tip, mentre il criterio di Mohr/Coulomb vale per intorni infinitesimi, il codice valuta d rispetto ad un dominio di Mohr/Coulomb traslato, per mezzo di un coefficiente correttivo k :

$$|\tau| = kc - \sigma \tan \varphi. \quad (5)$$

Quando la condizione di sicurezza:

$$d > R \quad (6)$$

viene violata, il codice provvede automaticamente a calcolare:

- le coordinate del punto tensione la cui distanza dalla retta limite è minima;
- la direzione di propagazione come pendenza della retta congiungente il punto sopra determinato col polo di Mohr (Fig. 3).

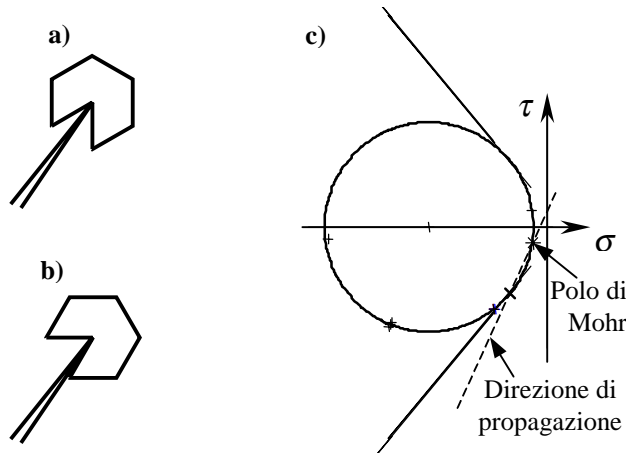


Fig. 3: Prima e seconda posizione del nocciolo esagonale (a, b) e corrispondente circolo di Mohr (c).

5. PROPAGAZIONE IN MODO MISTO

Si verifica un Modo Misto ogni volta che il crack risulta obliquo rispetto, sia alla direzione del carico, sia alla direzione di apertura del crack (Fig. 4).

In questo lavoro, il Modo Misto viene studiato solo per problemi assialsimmetrici ed è quindi rappresentato da una combinazione di Modo I e Modo II. In tale contesto, si verifica la circostanza secondo la quale le labbra del crack possono essere suddivise in zone con differenti condizioni cinematiche (Fig. 4):

zona a) prevale il Modo I e le 2 labbra del crack subiscono un movimento relativo di apertura senza trasmissione di azione mutua;

zona b) prevale il Modo II e le 2 labbra del crack subiscono un movimento relativo di scorrimento con trasmissione di azione mutua per attrito.

In funzione della geometria del dominio e delle condizioni al contorno, per il generico crack si può avere più di una zona a) e più di una zona b). In generale, si può dire che si origina una zona b) ogni volta che l'azione combinata della configurazione di carico e delle condizioni al contorno costringe le labbra del crack a richiudersi.

La zona a) e la zona b) sono rappresentate in Fig. 4 per crack con inclinazione generica ed estremo libero vincolato a scorrere in direzione orizzontale.

La simulazione numerica non può aver luogo se non è nota la posizione del punto S che separa le due zone. Infatti, la prevalenza del Modo I piuttosto che del Modo II comporta diverse condizioni al contorno sulle labbra del crack e tutte le condizioni al contorno devono essere note perché la simulazione numerica possa aver luogo. In generale, il punto S è funzione del passo di carico e della lunghezza del crack. Perciò, S è un'incognita del problema in Modo Misto. Per identificare S è necessario procedere per passi successivi:

I passo) si valuta la configurazione deformata del dominio nell'ipotesi di spostamenti liberi per tutti i nodi del crack (configurazione deformata di I passo);

II passo) si utilizza la configurazione deformata di I passo per valutare l'estensione della parte b nell'ipotesi che, in essa, gli spostamenti relativi tra i nodi opposti siano nulli (configurazione deformata di II passo);

III passo) si introducono gli spostamenti relativi tra i nodi opposti compresi nella zona b) e si valuta nuovamente l'estensione della parte b (configurazione deformata finale).

Il III passo corrisponde all'introduzione di contact element con scorrimento relativo nel Metodo agli Elementi Finiti ([21], [22], e [23]).

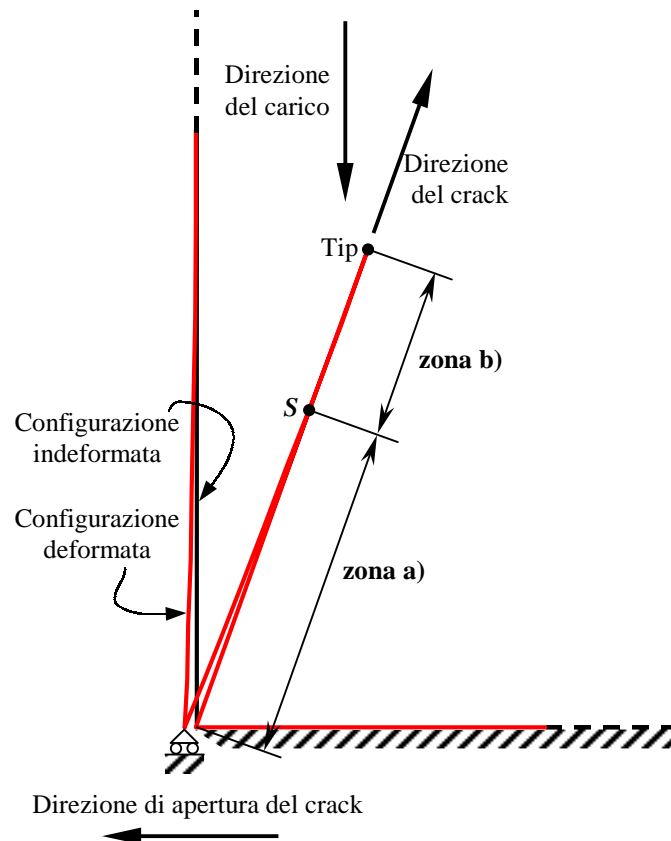


Fig. 4: Schema di crack sollecitato in Modo Misto

6. RISULTATI NUMERICI

La procedura per l'identificazione della direzione di propagazione del crack è stata impiegata per la simulazione numerica di prove di carico four-point bending su travi in calcestruzzo [4] e di prove di compressione a rottura su cilindri in calcestruzzo [3]. Nel primo caso, il crack è soggetto a Modo I, mentre, nel secondo caso, il crack è soggetto a Modo Misto. Infatti, nel primo caso, il crack si enuclea nella sezione di mezzeria (Fig. 5a) e si propaga perpendicolarmente al vettore momento, mentre, nel secondo caso, il crack si enuclea sulla superficie laterale, in corrispondenza delle due basi (Fig. 5b), e si propaga nello spessore del cilindro. In questo secondo caso, per il vincolo rappresentato dai piatti della pressa, il crack risulta obliquo rispetto sia alla direzione del carico, sia alla direzione di apertura (§5).

La simmetria cilindrica dei solidi compressi permette di ridurre l'analisi numerica alla generica sezione longitudinale, in quanto il problema è assialsimetrico. In Fig. 5b sono stati messi in evidenza i due assi di simmetria della sezione longitudinale. La doppia simmetria

permettete un'ulteriore riduzione dell'analisi ad un solo quarto della sezione longitudinale. Le condizioni al contorno, la direzione del carico, la direzione del crack e la direzione di apertura del crack per il quarto inferiore sinistro in Fig. 5b sono quelle mostrate in Fig. 4.

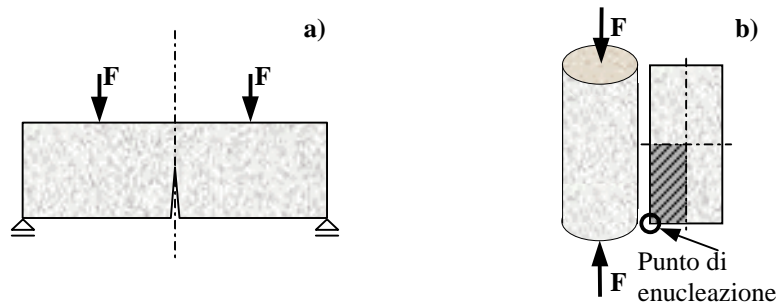


Fig. 5: Schematizzazione della prova di carico four-point bending (a) e della prova di compressione (b).

In modo analogo, per la presenza di un asse di simmetria, è possibile ridurre l'analisi numerica a solo metà della trave in Fig. 5a. In questo secondo caso, il codice ha identificato una direzione di propagazione del crack molto prossima ad essere sub-verticale. La tecnica di propagazione intra-element e la possibilità di raffinare a piacere la dimensione della mesh hanno permesso di identificare il crack-path con grande accuratezza (Fig. 6).

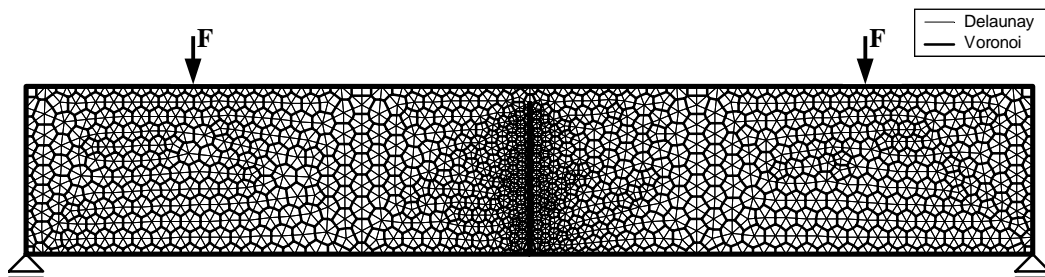


Fig. 6: Crack-path numerico per prove di carico four-point bending

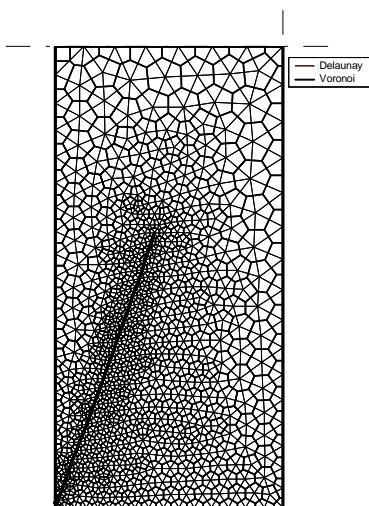


Fig. 7: Crack-path numerico in compressione



Fig. 8: Crack-path sperimentale in compressione

Nel caso dei cilindri compressi, il tool per la modellazione della propagazione in Modo Misto si è mostrato adeguato a descrivere la propagazione del crack all'interno del solido e ha fornito risultati in buon accordo con l'evidenza sperimentale. Infatti, introducendo nel

modello numerico le caratteristiche costitutive efficaci desumibili dalla prova di compressione ([2] e [24]), si identifica una pendenza media della direzione di propagazione che, in accordo con l'evidenza sperimentale, è di circa 70° (Fig. 7 e Fig. 8). Ancora una volta, la propagazione intra-element e la possibilità di raffinare la mesh hanno permesso un'accurata identificazione.

Ripetendo l'analisi numerica per varie snellezze e a parità di condizioni al contorno [2], si è visto che la pendenza del crack è una caratteristica del materiale, non dipendendo in alcun caso dalla geometria del solido. Anche questo risultato concorda con l'evidenza sperimentale.

7. CONCLUSIONI

La tecnica di svincolamento nodale con propagazione intra-element e remeshing presentata in questo lavoro per la modellazione della propagazione del crack tramite Metodo delle Celle fornisce risultati in buon accordo con l'evidenza sperimentale, tanto in Modo I, quanto in Modo Misto. Ciò rappresenta una sostanziale validazione del Metodo delle Celle come strumento di analisi di solidi fessurativi.

Il codice proposto è in grado di stimare in modo automatico quale parte del crack è sollecitata in Modo I e quale in Modo II. Inoltre, il codice è in grado di stimare l'entità degli scorrimenti relativi che si originano tra i nodi della porzione di crack sollecitata in Modo II.

Ogni passo nell'evoluzione del crack-path è completamente automatico. Ovvero, quando viene violata la condizione di sicurezza (6) al tip del crack:

- la direzione di propagazione del crack viene valutata in modo automatico;
- la geometria del dominio viene aggiornata in modo automatico;
- il generatore di mesh viene invocato in modo automatico sul nuovo dominio;
- l'analisi statica e l'aggiornamento della geometria vengono ripetuti finché il crack non raggiunge la condizione di non propagazione.

Per ogni modifica alla geometria del dominio, la forma della nuova mesh viene generata in modo predefinito dall'operatore nell'intorno del nuovo tip e secondo i criteri di ottimizzazione del generatore di mesh nel resto del dominio.

Ulteriori studi per incrementare l'efficienza del codice sono attualmente in corso.

L'approccio di identificazione qui proposto ammette un'interessante sviluppo futuro [1]: la peculiarità del Metodo delle Celle di evitare la fase di discretizzazione tipica della formulazione differenziale (§2) comporta ridotti tempi di calcolo, se paragonati a quelli richiesti dai codici agli Elementi Finiti. Questo aspetto merita di essere sviluppato con ulteriore e più approfondita analisi.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] Tonti E.: Finite Formulation of the Electromagnetism Field, *accettato per la pubblicazione da Journal of Computation Physics* (Gennaio 2000).
- [2] Ferretti E.: Modellazione del Comportamento del solido Cilindrico Compresso; Tesi di Dottorato – Dottorato di Ricerca in Materiali Compositi per l'Ingegneria Civile – XIII Ciclo, Lecce, 2001.
- [3] Ferretti E., Viola E., Di Leo A., Pascale G.: Propagazione della Frattura e Comportamento Macroscopico in Compressione del Calcestruzzo; *AIMETA, XIV Congresso Nazionale*, Como 1999; Sommari, p.100 (testo completo su CD Rom).
- [4] Ferretti E., Viola E., Di Leo A.: Impiego del Metodo delle Celle nella Stima dei Fattori di Intensificazione degli Sforzi; *AIAS, XXIX Convegno Nazionale*, Lucca 2000; Atti, pp. 699-708.

- [5] Gurson A.L.: Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I – Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media, *Journal of Engineering Materials and Technology*, ASME, Vol. 90, pp. 2-15 (1977).
- [6] Rousselier G.: Finite Deformation Constitutive Relations Including Ductile Fracture Damage; in: Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture, S. Nemat-Nasser Ed., pp. 331-355, 1981.
- [7] Kim H.G., Atluri S.N.: Arbitrary Placements of Secondary Nodes, and Error Control, in the Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method, *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Vol. 1, No. 3, pp. 11-32 (2000).
- [8] Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L.: Element Free Galerkin Methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 229-256 (1994).
- [9] Rashid M.M.: The Arbitrary Local Mesh Replacement Method: an Alternative to Remeshing for Crack Propagation Analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 154, pp. 133-150 (1998).
- [10] Bouchard P.O., Bay F., Chastel Y, Tovina I.: Crack Propagation Modelling using an Advanced Remeshing Technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 189, pp. 723-742 (2000).
- [11] Cosmi F.: Applicazione del Metodo delle Celle con Approssimazione Quadratica; *AIAS, XXIX Convegno Nazionale*, Lucca 2000; Atti, pp. 131-140.
- [12] Erdogan F., Sih G.C.: On the Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear, *Journal of Basic Engineering*, ASME, Vol. 85, pp. 519-527 (1963).
- [13] Maiti S.K., Smith R.A.: Comparison of the Criteria for Mixed Mode Brittle Fracture Based on the Preinstability Stress-Strain Field – Part II: Pure Shear and Uniaxial Compressive Loading, *International Journal of Fracture*, Vol. 24, pp. 5-22 (1984).
- [14] Sih G.C., Macdonald B.: Fracture Mechanics Applied to Engineering Problems – Strain Energy Density Fracture Criterion, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 6, pp. 361-386 (1974).
- [15] Sih G.C.: Analytical Aspects of Macro-Structure Mechanics, Analytical and Experimental Fracture Mechanics; edited by Sih G.C. and Mirabile M., Sijthoff and Noordhoff, pp. 3-15, 1981.
- [16] Carpinteri A., Sih G.C.: Damage Accumulation and crack Growth in Bilinear Materials with Softening: Application of Strain Energy Density Theory, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 1.2, pp. 145-160 (1984).
- [17] Sih G.C.: The Strain Energy Density Concept and Criterion, *Special Issue in Fracture Mechanics Dedicated to G. R. Irwin and A. K. Rao. J Aeronautical Soc India*, Vol. 37, No. 1, pp. 43-60 (1985).
- [18] Paris P.C., Erdogan F.: A Critical Analysis of Crack Propagation Laws, *Journal of Basic Engineering*, ASME, Vol. 85, pp. 528-534 (1963).
- [19] Koenke K., Schmid G.: Prediction of Crack Propagation Directions under Plane Normal and Shear Loading; in: Aspect in Modern Comp. Struct. Analysis, Meskouris & Wittek Editors, Balkema Press, Rotterdam, pp. 431-441, 1997.
- [20] Di Tommaso A.: *Fondamenti di Scienza delle Costruzioni*; Patron, Bologna, 1981.
- [21] Har J.: A New Scalable Parallel Finite Element Approach for Contact-Impact Problems; Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology, Atlanta, 1998.
- [22] Papadopoulos P., Jones R.E., Solberg J.: A Novel Finite Element Formulation for Frictionless Contact Problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, pp. 2603-2617 (1995).
- [23] Zhong Z.H.: Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems; Oxford/New York/Tokyo, 372 pp., Book review: Okrouhlik M., *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 48, No. 5, 1995, 5R4 (1993).
- [24] Ferretti E.: Effective Properties for Plain Concrete by Mono-Axially Compressed Cylinders; *FDM, International Conference on Fracture and Damage Mechanics*, Milan 2001; Proceedings, in press.