

Elena FERRETTI, Alessandro ROSATI, Ivo CALIÒ

**MODELLAZIONE DEL COMPORTAMENTO  
DINAMICO DI OGGETTI D'ARTE**

Nota Tecnica n. 146

Anno 2004



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BOLOGNA**

**DISTART**

Dipartimento di Ingegneria delle Strutture, dei Trasporti,  
delle Acque, del Rilevamento, del Territorio

Viale Risorgimento, 2 – 40136 Bologna



Elena FERRETTI, Alessandro ROSATI, Ivo CALIÒ

# MODELLAZIONE DEL COMPORTAMENTO DINAMICO DI OGGETTI D'ARTE



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BOLOGNA

**DISTART**

Dipartimento di Ingegneria delle Strutture, dei Trasporti,  
delle Acque, del Rilevamento, del Territorio  
Viale Risorgimento, 2 – 40136 Bologna

Stampato presso il DISTART dell'Università di Bologna  
Bologna, AGOSTO 2004

Pubblicazione registrata ai sensi dell'art. 1 del Decreto legislativo luogotenenziale del 31 agosto 1945, n.660 presso la Procura della Repubblica di Bologna in data 19 Agosto 2004 e presso la Prefettura di Bologna in data 19 Agosto 2004.

## ***Introduzione e sommario***

La risposta sismica di un oggetto d'arte può essere valutata assimilandolo ad un blocco rigido. L'indagine verrà condotta con riferimento al *modello di Housner* [1] utilizzando però il *regime di grandi spostamenti*. L'oggetto d'arte si pensa investito direttamente da un accelerogramma al piede che può provocarne il ribaltamento e la seguente rottura da impatto. Per evitare tale fenomeno che potrebbe, alcune volte, portare alla perdita di un capolavoro di inestimabile valore, si è eseguita una indagine della loro vulnerabilità alle azioni sismiche.

Le equazioni del moto che governano il fenomeno delle *oscillazione forzate*, del manufatto artistico, sono state ricavate attraverso le equazioni di Lagrange generalizzate ed integrate numericamente, visto la loro elevata non linearità. La caratterizzazione dello specifico oggetto d'arte è stata eseguita tramite il suo *rapporto geometrico*, il *fattore di scala* e un *parametro di inerzia rotazionale*. Inoltre, sono state distinte quattro modalità di comportamento dinamico del blocco a seguito dell'eccitazione sismica: pieno contatto, oscillazione con rientro in stick, oscillazione, ribaltamento.

Inizialmente, si è pensato di studiare il comportamento dinamico di una statua, rappresentante una figura umana di circa due metri, con accelerazione al piede pari a quella del terremoto di El Centro (1940). Si è fatta un'analisi variando la snellezza e tenendo costante il fattore di scala, riportando in un grafico il tempo di ribaltamento in funzione della snellezza dell'oggetto. Successivamente, si è vista l'influenza del fattore di scala sul comportamento della statua, incrementandolo e mantenendo costante il rapporto geometrico. Per avere una visione d'insieme, si è calcolato il tempo di uscita dalla fase di stick e il tempo di ribaltamento, variando entrambi i parametri contemporaneamente. Quindi si è elaborato una *mappa di vulnerabilità sismica* e un *diagramma del fattore di rischio* che consentono di distinguere immediatamente i manufatti artistici più stabili.

Per testare la sensibilità della risposta dinamica al variare dell'oggetto d'arte, sono state compiute le stesse analisi partendo da un vaso vuoto alto circa *1.00 m*. Per poter confrontare i diversi risultati ottenuti per la statua e per il vaso si sono rappresentate le tipologie di risposta dinamica, sopra descritte, in forma percentuale.

Al fine di comprendere l'influenza del livello di eccitazione sismica sul comportamento dinamico degli oggetti d'arte, è stata analizzata la classe di statue soggette all'accelerogramma di Kobe. Per stimare la bontà dei risultati è stato riportato il confronto tra la frequenza linearizzata della classe di blocchi e la trasformata di Fourier del terremoto. In seguito si sono creati degli accelerogrammi artificiali partendo da quello di Kobe, moltiplicandolo per un'onda sinusoidale selezionando ampiezza, frequenza e fase. Lo scopo è quello di mantenere la *PGA* del nuovo terremoto circa costante. Si è analizzato, quindi, il comportamento dinamico di una classe di manufatti artistici soggetti a questi accelerogrammi artificiali, stilando sempre una mappa di vulnerabilità e una mappa di stabilità per ogni caso. Inoltre, per riassumere le differenti risposte ottenute, sono state rappresentate in forma probabilistica in un unico diagramma.

Infine è stato eseguito uno studio della classe di statue soggette allo stesso accelerogramma di Kobe per diversi fattori di scala, per capire come l'incremento della *PGA*, a parità di spettro di frequenze dell'eccitazione, influisca sulla risposta del sistema.

## ***Il modello strutturale considerato***

Si ritiene che il moto del blocco sia bidimensionale in accordo con il modello semplificato del blocco oscillante (*Simple Rocking Model*) e che il blocco sia sempre in contatto con la fondazione. Il modello strutturale consiste in un blocco rigido semplicemente supportato da una base rigida connessa efficacemente al terreno. L'oggetto può presentare alternativamente fasi di pieno contatto (stick) e oscillazione in dipendenza dalle caratteristiche del sistema e dalla tipologia di eccitazione. Il sistema è dotato di un unico grado di libertà.

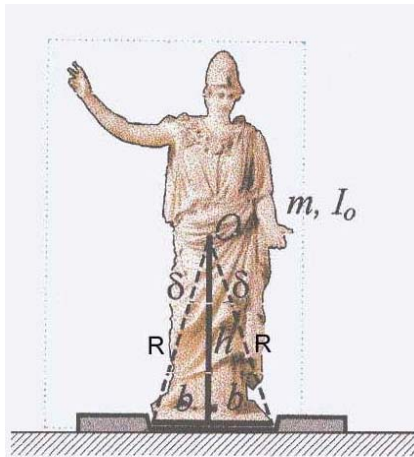


Figura 1: Il Modello Strutturale considerato.

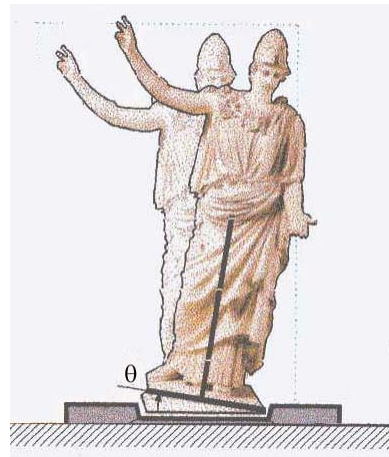


Figura 2: La Cinematica.

Il modello strutturale piano studiato, illustrato in Figura 1, è composto da un blocco rigido che è inteso a rappresentare l'oggetto d'arte, sostenuto da una base rigida. Il blocco ha massa  $m$ , e momento d'inerzia polare rispetto al suo baricentro  $I_o$  e può oscillare sopra il supporto rigido. Lo scorrimento dell'oggetto è prevenuto per mezzo di un contrasto sismico ottenuto con l'opportuna sagomatura della superficie superiore della base. L'altezza del baricentro dell'oggetto è  $h$ ,  $b$  è la semibase del blocco ed  $R$  è la distanza tra l'estremità della base del blocco e il centro di massa.

### La cinematica

Il grado di libertà dinamico del sistema è in relazione con la *fase del moto in corso*. Nella *fase di oscillazione* il sistema ha 1 grado di libertà, dovuto alla rotazione del blocco attorno ad una delle sue estremità. Nella *fase di pieno contatto (stick)* l'oggetto si "muove" all'unisono con il supporto rigido, il sistema non presenta alcun grado di libertà in quanto la sua posizione è definita dalle componenti di spostamento sismico. Il parametro lagrangiano utilizzato per descrivere il moto del sistema è la rotazione rigida del blocco  $\theta$ . La cinematica del sistema e il segno positivo del parametro lagrangiano sono illustrati in Figura 2.

Il supporto è soggetto allo spostamento orizzontale  $u_g(t)$  e verticale  $v_g(t)$  dovuto all'azione sismica rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. Le componenti orizzontali e verticali dello spostamento totale del baricentro del blocco rigido  $u_t(t)$ ,  $v_t(t)$  possono essere ricavate in base a quanto riportato nella Figura 3:

$$u_t = u_g \pm b \cdot (1 - \cos \theta) + h \cdot \sin \theta \quad (1)$$

$$v_t = v_g \pm b \cdot (\sin \theta) - h \cdot (1 - \cos \theta)$$

dove il doppio segno si riferisce rispettivamente alle rotazione oraria e a quella antioraria dell'oggetto.

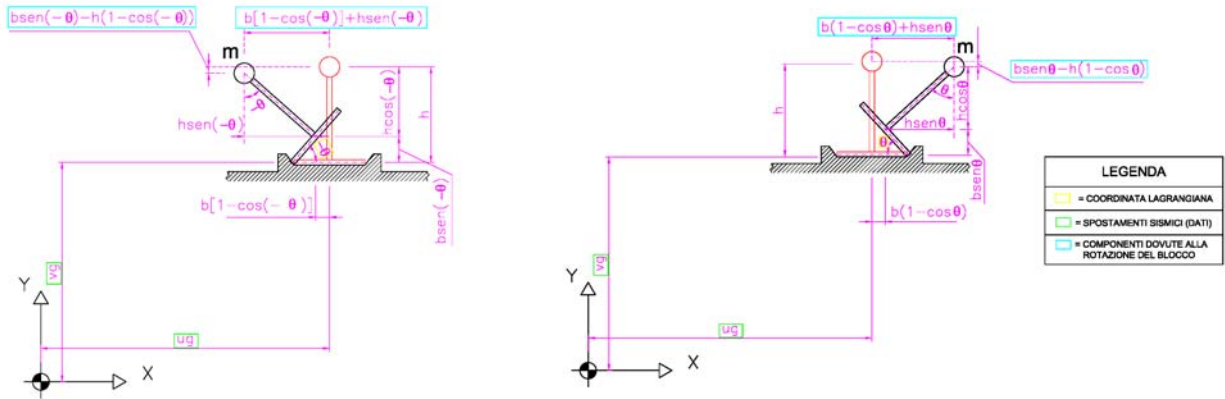


Figura 3a: Componenti dello spostamento per rotazioni antiorarie.

Figura 3b: Componenti dello spostamento per rotazioni orarie.

### Le equazioni del moto

Durante la fase di pieno contatto, ipotizzando che non vi sia scorrimento tra base di appoggio e statua (data la particolare conformazione del supporto), il moto della struttura è governato dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}
 u_t &= u_g, \quad \dot{u}_t = \dot{u}_g, \quad \ddot{u}_t = \ddot{u}_g \\
 v_t &= v_g, \quad \dot{v}_t = \dot{v}_g, \quad \ddot{v}_t = \ddot{v}_g \\
 \theta &= \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

come anche indicato da Yang et Al. (2000) [2].

Il corpo in questa fase del moto è soggetto ad una forza di inerzia orizzontale e verticale che valgono rispettivamente:

$$\begin{aligned}
 F_x &= m \cdot \ddot{u}_g \\
 F_y &= m \cdot \ddot{v}_g
 \end{aligned} \tag{3}$$

Nella fase di oscillazione il sistema manifesta la sua non linearità e la scrittura della equazione del moto partendo dalle singole forze agenti risulta più complessa. Si utilizza, quindi, un metodo energetico, in particolare le equazioni di Lagrange, per poter esprimere tale equazione. Si adottano le equazioni di Lagrange nella loro versione generalizzata esplicitate per il parametro lagrangiano  $\theta$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \right) = 0 \tag{4}$$

Sviluppando i vari termini tenendo conto che l'energia cinetica e potenziale valgono rispettivamente

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{u}_t^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{v}_t^2 + \frac{1}{2} \cdot I_o \cdot \dot{\theta}^2 \tag{5}$$

$$\Pi = -m \cdot g \cdot [h \cdot (1 - \cos \theta) \mp b \cdot \sin \theta] \tag{6}$$

si ottiene la seguente espressione dell'equazione del moto

$$(m \cdot R^2 + I_o) \cdot \ddot{\theta} + m \cdot (h \cdot \cos \theta \pm b \cdot \sin \theta) \cdot \ddot{u}_g - m \cdot (h \cdot \sin \theta \mp b \cdot \cos \theta) \cdot (g + \ddot{v}_g) = 0 \tag{7}$$

dove il segno superiore è relativo ai valori positivi (orari) del parametro lagrangiano, mentre il segno inferiore a quelli negativi (antiorari).

### Le condizioni di transizione tra le fasi

Per esprimere numericamente la risposta dinamica del sistema considerato, devono essere ricavate le *condizioni di transizione tra le fasi* del moto che possono presentarsi. Come, già accennato, il sistema si può presentare o in fase di oscillazione (fase dinamica) o in fase di pieno contatto (fase statica), in cui assorbe completamente la forza d'inerzia data dal sisma senza muoversi dal supporto ancorato alla "fondazione".

#### La condizione di oscillazione incipiente

L'oggetto inizia ad oscillare quando il momento ribaltante,  $M_r$  dovuto al caricamento esterno, raggiunge il momento stabilizzante disponibile,  $M_s$  dato dalle forze esterne associate alla gravità e all'accelerazione verticale (momenti rispetto al punto  $B$  di Figura 4). Tali momenti valgono rispettivamente:

$$M_r = m \cdot \ddot{u}_g \cdot h \quad (8)$$

$$M_s = m \cdot (g + \dot{v}_g) \cdot b \quad (9)$$

$$M_r = M_s \Rightarrow |\ddot{u}_g| = \frac{b}{h} \cdot (g + |\dot{v}_g|) \quad (10)$$

In assenza di accelerazione verticale la condizione di incipiente sollevamento risulta funzione del solo rapporto geometrico:

$$|\ddot{u}_g| = \frac{b}{h} \cdot g \quad (11)$$

#### La condizione di impatto

Un impatto tra il blocco e la base rigida avviene alla fine della fase di oscillazione quando la rotazione  $\theta$  si approssima allo zero. L'impatto è considerato istantaneo, dunque la variazione di velocità sarà anch'essa istantanea finché la posizione del blocco non è cambiata durante l'urto. Quando nel moto di oscillazione il blocco rigido impatterà con la fondazione rigida si avrà una perdita di energia. Sarà utilizzata la classica teoria del punto di impatto di Shenton e Jones [3], [4] che considera il blocco rigido in contatto la fondazione all'istante dell'impatto in un sol punto. Il pedice 1 sarà utilizzato per caratterizzare la rotazione subito prima dell'urto mentre il pedice 2 identificherà la rotazione subito dopo l'urto.

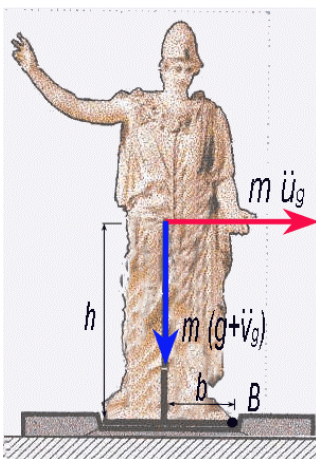


Figura 4: La condizione di oscillazione incipiente.

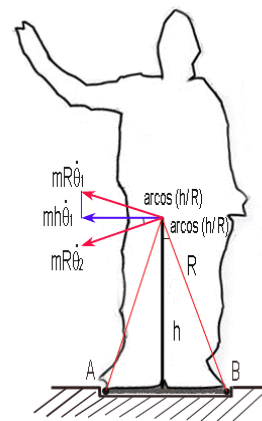


Figura 5: Completa dissipazione della quantità di moto verticale.



La dissipazione di energia associata all'impatto viene considerata in maniera semplificata prendendo spunto dagli studi di Yim e Chopra [5], assumendo l'urto perfettamente anelastico con completa dissipazione della quantità di moto verticale. La dissipazione della quantità di moto verticale viene illustrata nella Figura 5, dove viene considerato come angolo di rotazione il punto  $A$  mentre come angolo di impatto il punto  $B$  e sono messe in evidenza le componenti della quantità di moto lineari subito prima e subito dopo l'urto. La quantità di moto lineare subito prima dell'urto è  $m \cdot R \cdot \dot{\theta}_1$ , per eliminare la sua componente verticale si esegue la proiezione orizzontale del vettore ottenendo:

$$m \cdot R \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{h}{R}\right)\right) = m \cdot R \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \frac{h}{R} \quad (12)$$

La quantità di moto lineare subito dopo l'urto è

$$m \cdot R \cdot \dot{\theta}_2 \quad (13)$$

per assicurare la completa dissipazione della quantità di moto verticale si uguaglia la (12) con la (13) :

$$\dot{\theta}_2 = \frac{h}{R} \cdot \dot{\theta}_1 \quad (14)$$

Ricordando la definizione di *coefficiente di restituzione* si ha :

$$e = \frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} = \frac{h}{R} \quad (15)$$

come indicato da Calì e Marletta (2003) [6].

Dalla (15) si può notare che il coefficiente di restituzione, così ottenuto è dipendente solamente dai parametri geometrici del corpo.

Il tipo di comportamento del blocco rigido soggetto all'impatto è schematizzato nella Figura 6, in cui sono visualizzate le quantità di moto lineari e angolari agenti sul blocco prima e dopo il fenomeno. I blocchi si avvicinano alla base oscillando attorno all'angolo destro che si definisce angolo di contatto (in Figura 6 indicato con  $c$ ) e successivamente all'impatto risaliranno mediante la rotazione attorno all'angolo sinistro che si definisce angolo di impatto.

Per la valutazione se dopo l'impatto l'oggetto rimarrà nella fase di pieno contatto o si risolleverà attraverso una delle sue estremità, cioè se il sistema si muoverà verso una fase di pieno contatto oppure verso una nuova fase di oscillazione, è utile calcolare l'energia potenziale nelle due fasi:

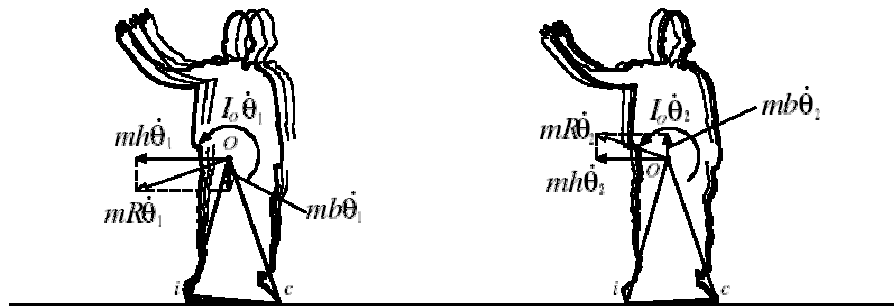


Figura 6: Quantità di moto e Momento della quantità di moto sul blocco prima e dopo l'urto.

a) Fase di oscillazione :  $\Pi = -m \cdot g \cdot [h \cdot (1 - \cos \theta) \mp b \cdot \sin \theta]$

b) Fase di pieno contatto :  $\Pi = 0$

Se all'istante dell'impatto l'energia,  $\Pi > 0$ , o equivalentemente  $\theta_2 \neq 0$ , allora il blocco si risolleverà. Se al contrario  $\Pi = 0$  e il momento stabilizzante,  $M_s$  è più grande del momento di ribaltamento,  $M_r$ , allora il sistema rimane in contatto con la base. Facendo la seguente posizione si definisce una variabile logica chiamata *parametro decisionale*:

$$\Lambda = \langle \Pi = 0 \text{ AND } M_s \geq |M_r| \rangle \quad (16)$$

In particolare, calcolando il valore del solo parametro decisionale al tempo di impatto, all'interno dell'intervallo temporale di integrazione, si può conoscere il comportamento del blocco rigido:

$\Lambda \rightarrow \text{Vero} \Rightarrow \text{Fase di pieno contatto}$

$\Lambda \rightarrow \text{Falso} \Rightarrow \text{Fase di oscillazione}$

Il comportamento globale del sistema può essere riassunto nello schema di Figura 7.

### **Risposta all' eccitazione sismica**

Ipotizzando di essere lontani dall'epicentro del sisma è accettabile trascurare la componente verticale dell'accelerogramma, per cui l'equazione che governa le oscillazioni forzate (7) dell'oggetto d'arte si specializza in:

$$(m \cdot R^2 + I_o) \cdot \ddot{\theta} + m \cdot (h \cdot \cos \theta \pm b \cdot \sin \theta) \cdot \ddot{u}_g - m \cdot (h \cdot \sin \theta \mp b \cdot \cos \theta) \cdot g = 0 \quad (17)$$

Ricordando la definizione del momento d'inerzia rotazionale dalla (17) si ricava

$$\ddot{\theta} = -\frac{1}{I_c} \cdot [m \cdot (h \cdot \cos \theta \pm b \cdot \sin \theta) \cdot \ddot{u}_g - m \cdot (h \cdot \sin \theta \mp b \cdot \cos \theta) \cdot g] \quad (18)$$

sostituendo le seguenti relazioni geometriche, sviluppate attraverso le formule trigonometriche di addizione e sottrazione e con l'ausilio della Figura 1,

$$\sin(\delta \pm \theta) \cdot R = b \cdot \cos \theta \pm h \cdot \sin \theta$$

$$\cos(\delta \pm \theta) \cdot R = h \cdot \cos \theta \mp b \cdot \sin \theta$$

la (18) diviene

$$\ddot{\theta} = -\frac{1}{I_c} \cdot [m \cdot \cos(\delta \mp \theta) \cdot R \cdot \ddot{u}_g \pm m \cdot \sin(\delta \mp \theta) \cdot R \cdot g] \quad (19)$$

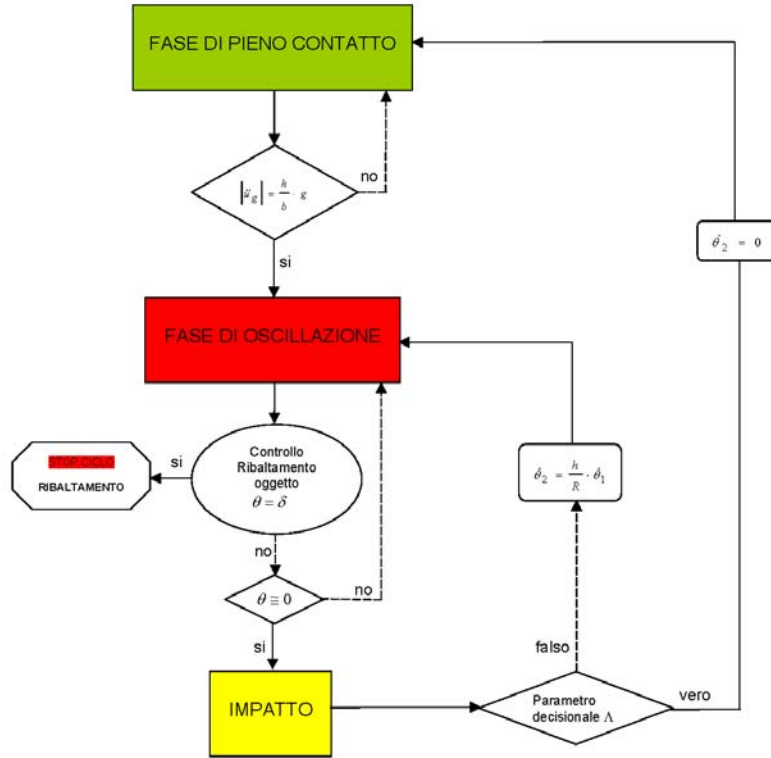


Figura 7: Diagramma di flusso delle condizioni di transizione tra le fasi

Secondo la definizione del parametro di frequenza

$$p = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot R}{I_c}} \quad (20)$$

la (19) assume la forma

$$\ddot{\theta} = -p^2 \cdot \left[ \cos(\delta \mp \theta) \cdot \frac{\ddot{u}_g}{g} \pm \text{sen}(\delta \mp \theta) \right] \quad (21)$$

dove il primo segno vale per le rotazioni positive, mentre il secondo per quelle negative, perciò la (21) si può anche esprimere come

$$\ddot{\theta} = -p^2 \cdot \left[ \cos(\delta - \text{sgn}(\theta) \cdot \theta) \cdot \frac{\ddot{u}_g}{g} + \text{sgn}(\theta) \cdot \text{sen}(\delta - \text{sgn}(\theta) \cdot \theta) \right] \quad (22)$$

Per la valutazione della risposta dinamica all'eccitazione sismica l'elevata non linearità delle equazioni del moto (22), non consente di trovare l'integrale generale in forma chiusa. Si è ottenuta una soluzione numerica attraverso la formulazione dell'equazione differenziale nello spazio di stato dove il vettore di stato del sistema è

$$\{y(t)\} = \begin{Bmatrix} \theta \\ \dot{\theta}(t) \end{Bmatrix} \quad (23)$$

ed il vettore delle derivate temporali è

$$\{f(t)\} = \{\dot{y}(t)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ -p^2 \cdot \left[ \cos(\delta - \text{sgn}(\theta) \cdot \theta) \cdot \frac{\ddot{u}_g}{g} + \text{sgn}(\theta) \cdot \text{sen}(\delta - \text{sgn}(\theta) \cdot \theta) \right] \end{Bmatrix} \quad (24)$$

L'integrazione numerica della (22) è stata eseguita con un *metodo di Runge-Kutta*, implementato dalla funzione ODE45 messa a disposizione tra i solver di MATLAB (2002). Gli istanti di passaggio tra due successive fasi del moto sono stati controllati attraverso un'accurata gestione degli eventi associati alle condizioni di sollevamento e di ricontatto.

La caratterizzazione del sistema costituito da una precisa classe di oggetti d'arte viene eseguita attraverso un parametro dimensionale, detto *parametro di inerzia rotazionale* così definito:

$$\gamma = \frac{I_o}{m \cdot h^2} \quad (25)$$

oltre che in base al *rapporto di geometrico*  $\lambda$  e al *fattore di scala*  $R$ .

Vista l'impossibilità di trovare analiticamente il momento di inerzia polare per tali oggetti, i valori da considerare sono stati stimati mediante una modellazione solida in AUTOCAD tramite il comando MASSPROPRIETY che consente di ricavare le proprietà inerziali dell'oggetto modellato.

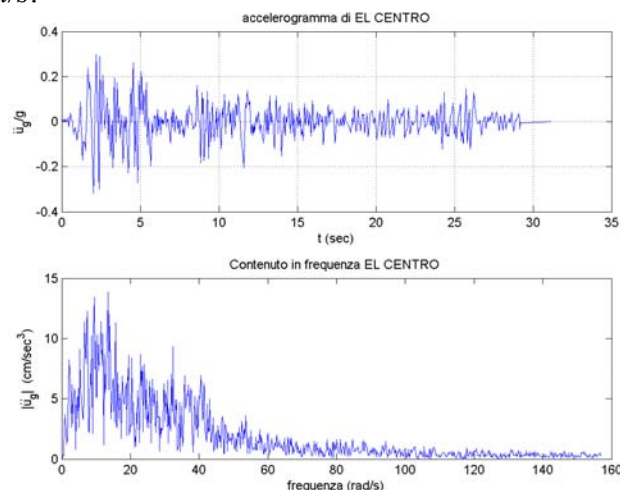
Le applicazioni riportate in seguito sono relative a blocchi con differenti caratteristiche che sono intesi a rappresentare alcuni oggetti d'arte soggetti all'eccitazione sismica. L'attenzione è stata focalizzata su due modelli di oggetti d'arte, una statua rappresentante una figura umana alta circa 2 m ed un vaso vuoto alto circa 1 m, le cui dimensioni caratteristiche e i parametri sono riportati nella seguente tabella.

**Tabella 1:** Parametri e dimensioni caratteristiche di base dei due oggetti d'arte

	<b>h</b> (cm)	<b>b</b> (cm)	<b>R</b> (cm)	<b>m</b> (Kg)	$\gamma$	$\lambda$
STATUA	100	25	103.08	100	0.3	4
VASO	60	15	61.85	10	0.1	4

### **Analisi dinamica della stabilità degli oggetti d'arte al variare un solo parametro significativo**

In questa analisi si è considerato la componente N-S dell'accelerogramma di El Centro registrato durante il terremoto del 18 maggio del 1940 nell'Imperial Valley in California illustrato con il relativo contenuto in frequenza, ottenuto attraverso la trasformata di Fourier, nella Figura 8. Tale accelerogramma presenta una  $PGA/g=0.319$  con un range di frequenze dominanti comprese nell'intervallo  $0 \leq \omega \leq 60$  rad/s.



**Figura 8:** Accelerogramma di El Centro (1940) con relativo contenuto in frequenza

Viene eseguito, in primo luogo, uno studio dei due oggetti base (cfr. Tabella 1) calcolando la *storia* nel tempo della risposta e riportando i seguenti *diagrammi* in funzione del tempo (s):

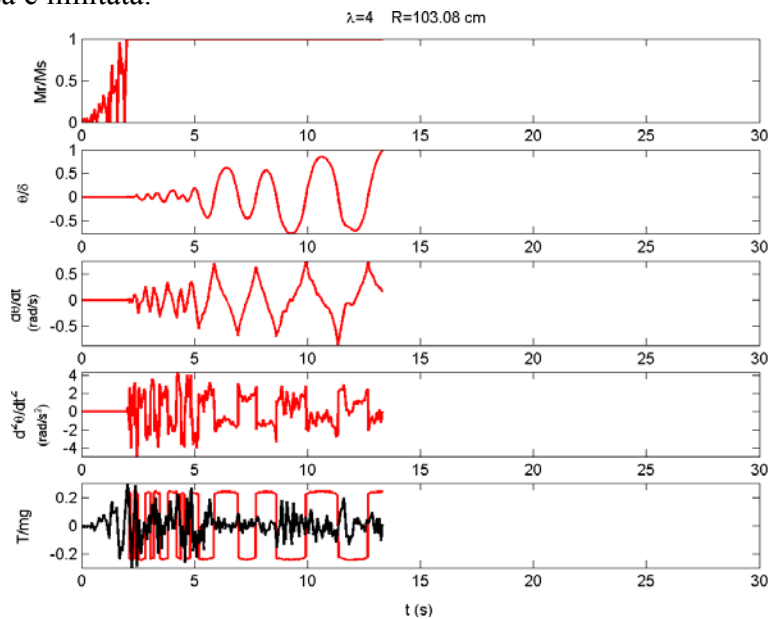
- a) rapporto tra momento ribaltante e momento stabilizzante,  $\frac{M_r}{M_s}$ ;

- b) rotazione adimensionalizzata rispetto all'angolo di snellezza,  $\frac{\theta}{\delta}$ ;
- c) velocità angolare,  $\dot{\theta}$  (rad/sec);
- d) accelerazione angolare,  $\ddot{\theta}$  (rad/sec<sup>2</sup>);
- e) taglio a base fissa ( $T_{bf}$  in nero) ed il taglio nel caso di sollevamento ( $T_{up}$  in rosso), adimensionalizzati rispetto alla forza di gravità.

Osservando la risposta ottenuta per la statua di dimensioni base (cfr. Tabella 1), illustrata in Figura 9, si nota che l'oscillazione della statua non parte fino a quando  $\frac{M_r}{M_s} = 1$ , successivamente si ha un

graduale anche se non monotono aumento delle oscillazioni ed il ribaltamento avviene per  $\frac{\theta}{\delta} = 1$  al tempo  $t=13.323$  s. Il taglio in condizioni di sollevamento (rosso) presenta un andamento fortemente discontinuo, conseguenza del comportamento non lineare del sistema, come descritto anche da Oliveto, Calio e Greco (2003) [7].

Confrontando il taglio a base sollevata, con quello a base fissa si riscontra che si ha una riduzione dell'azione tagliante alla base. Ciò è dovuta al fatto che parte dell'energia derivante dalla sollecitazione sismica è stata spesa nel sollevamento dell'oggetto ed inoltre l'azione tagliante che può essere trasmessa è limitata.



**Figura 9:** Riposta della statua di dimensioni base

Si sono eseguite una serie di simulazioni, con l'accelerogramma sopra indicato, per la statua e per il vaso, procedendo secondo i criteri riportati nella Tabella 2, diagrammando il tempo in cui avviene il ribaltamento in funzione del parametro caratteristico analizzato.

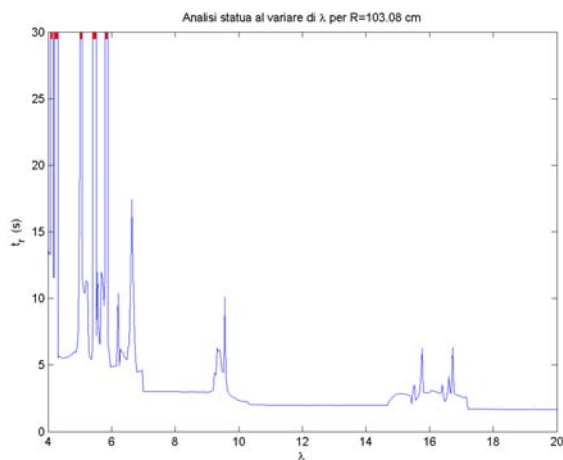
**Tabella 2:** Classe di oggetti considerati e passi di lavoro nelle analisi alla variazione di un solo parametro

Analisi in $\lambda$	$\lambda$	Passo $\lambda$	R=cost (cm)	Campioni	Analisi in $\lambda$	$\lambda$	Passo $\lambda$	R=cost (cm)	Campioni
<b>STATUA</b>	4-20	0.4	103.08	400	<b>VASO</b>	4-20	0.4	61.85	400
Analisi in R	<b>R</b> (cm)	<b>Passo R</b> (cm)	$\lambda$ =cost	<b>Campioni</b>	Analisi in R	<b>R</b> (cm)	<b>Passo R</b> (cm)	$\lambda$ =cost	<b>Campioni</b>
<b>STATUA</b>	50-500	1.125	4	400	<b>VASO</b>	30-300	0.675	4	400

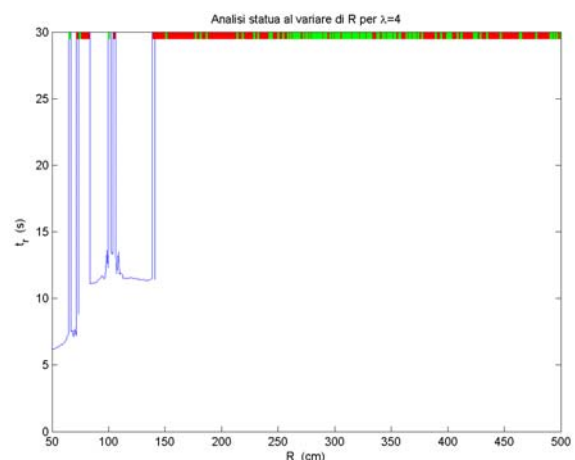
Sono stati distinti quattro tipi di comportamento del blocco soggetto ad eccitazione sismica:

- 1) Pieno contatto (stick) per l'intera durata dell'accelerogramma (cfr. fig. *asintoto ciano*)

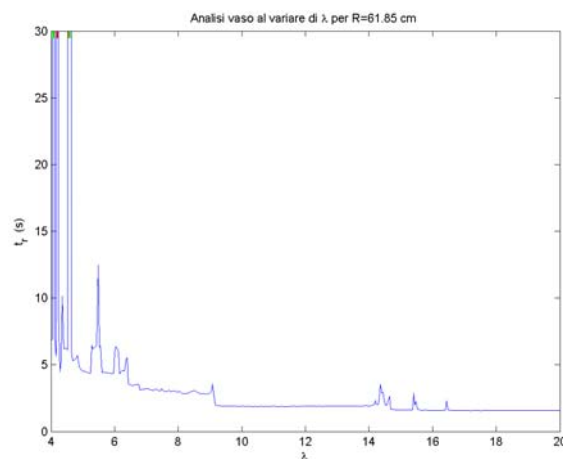
- 2) Oscillazioni con smorzamento con nuovo raggiungimento della fase di stick in un tempo minore della durata dell'applicazione della forzante (cfr. fig. con *marcatore verde*)
- 3) Oscillazioni perduranti fino al decorso della forzante (cfr. fig. con *marcatore rosso*)
- 4) Ribaltamento (cfr. fig. con *linea blu*)



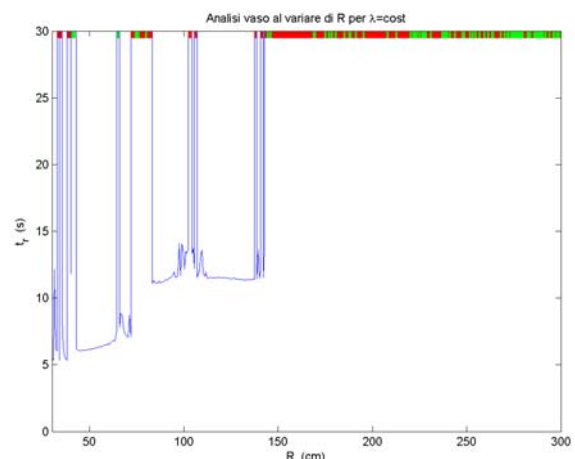
**Figura 10:** Statua- Tempo di ribaltamento in funzione della snellezza



**Figura 11:** Statua- Tempo di ribaltamento in funzione del fattore di scala



**Figura 12:** Vaso- Tempo di ribaltamento in funzione della snellezza



**Figura 13:** Vaso- Tempo di ribaltamento in funzione del fattore di scala

Si evidenzia, analizzando le risposte, come il comportamento dell'oggetto d'arte soggetto alla stessa eccitazione sismica sia molto sensibile alle variazioni di snellezza e del fattore di scala. Come l'aumento della snellezza dia luogo ad una maggiore instabilità dell'oggetto (Figura 10 e Figura 12 si ha una diminuzione del tempo di ribaltamento con  $\lambda$  maggiori), mentre l'incremento del fattore di scala porta l'oggetto sempre più verso la stabilità, tanto che per  $R \geq 150$  cm per entrambi gli oggetti d'arte non si hanno più ribaltamenti (zona con asintoti della Figura 11 e Figura 13).

Si rileva come il vaso sia maggiormente vulnerabile all'accelerogramma di El Centro rispetto alla statua, questo è da attribuire al maggior fattore di scala esibito da quest'ultimo.

### **Analisi multiparametrica della statua**

Utilizzando la stessa forzante sismica (El Centro), la ricostruzione di una rappresentazione tridimensionale del comportamento dell'oggetto d'arte è stata eseguita facendo una serie di successive simulazioni numeriche secondo la seguente tabella al fine di ottenere una *matrice di comportamento dell'oggetto d'arte*  $40 \times 40$ .

**Tabella 3:** Classe di oggetti considerati e passi di lavoro nelle analisi multiparametriche

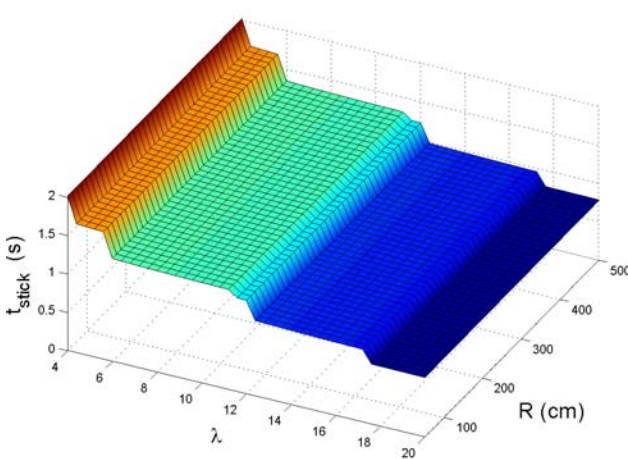
	$\lambda$	Passo $\lambda$	R (cm)	Passo R (cm)	Matr. Comp. Obj
<b>STATUA</b>	4-20	0.4	50-500	11.25	40 × 40
<b>VASO</b>	4-20	0.4	30-300	6.75	40 × 40

### Tempo di uscita della fase di stick in funzione della snellezza e del fattore di scala

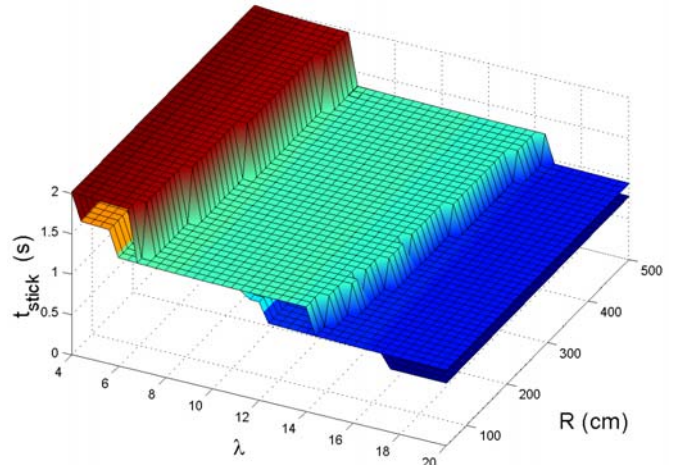
La valutazione del tempo di uscita dalla fase di pieno contatto (stick) si è fatta inizialmente, utilizzando l'uguaglianza tra il momento stabilizzante e il momento ribaltante (cfr. Figura 4):

$$|\ddot{u}_g| = \frac{b}{h} \cdot g \Rightarrow \frac{|\ddot{u}_g|}{g} = \frac{1}{\lambda} = \tan \delta \quad (26)$$

Implementando tale procedimento variando anche il fattore di scala si è ottenuta la rappresentazione tridimensionale del tempo di stick (Figura 14). Si nota come la *condizione di "stick base"* risulti ovviamente indipendente dal fattore di scala, R, e il tempo di uscita della fase di pieno contatto sia inversamente proporzionale alla snellezza,  $\lambda$  (cfr. 26).



**Figura 14:** Statua- Tempo di stick base in funzione dei parametri caratteristici



**Figura 15:** Statua- Confronto del tempo di stick con test di uscita e quello base in funzione dei parametri caratteristici

Per alcune particolari coppie  $(\lambda, R)$  che identificano lo specifico oggetto considerato, la condizione di "stick base" si è rivelata insufficiente per l'innescio di una vera e propria oscillazione. Si ha un sobbalzo che da luogo al passaggio in fase di oscillazione, nella quale inizia l'integrazione numerica che porta a problemi computazionali, conseguenti alla piccola variazione del parametro lagrangiano,  $(\theta)$ , nello step temporale esaminato. Per ovviare a tale insidia è stato utilizzato un *TEST DI USCITA* facendo entrare l'oggetto in fase di oscillazione, procedendo all'integrazione numerica con Runge-Kutta del quarto ordine e calcolando il valore massimo assunto dal parametro lagrangiano. Se  $|\max(\theta)| \leq e$ , essendo  $e$  una tolleranza prefissata, si rientra in fase di stick, altrimenti si procede verso la fase di oscillazione (Figura 16).

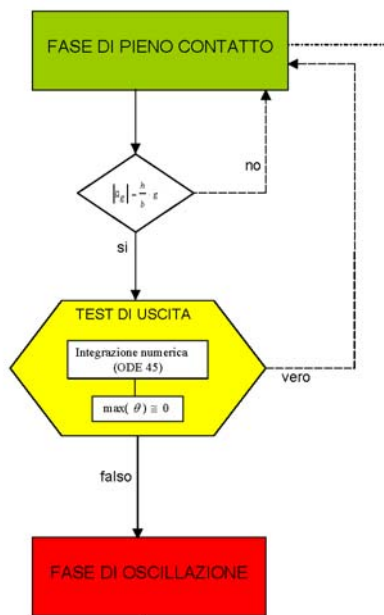
Riportando il confronto tra la condizione di *stick "base"* e quella ottenuta con il *test di uscita* (Figura 15) si osserva come la classe di oggetti d'arte presenti, per la nuova condizione, un tempo di uscita dalla fase di pieno contatto maggiore e come tale differenza sia più rilevante per oggetti con snellezza minore. Si rileva come la nuova condizione di uscita dallo stick assuma una lieve dipendenza diretta dal fattore di scala. Quindi le maggiori discrepanze tra le due condizioni di uscita dalla fase di stick si manifestano proprio per gli oggetti più piccoli che infatti hanno la tendenza a



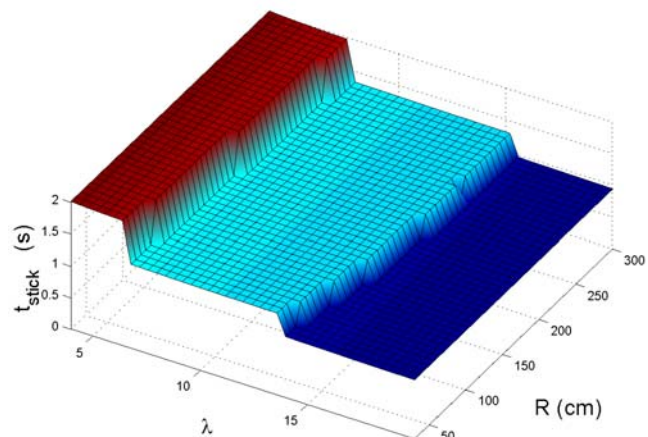
esibire sotto eccitazione sismica la “falsa oscillazione”. Tutti i risultati riportati sono stati ricavati con il *test di uscita*.

Per quanto riguarda la classe di vasi si è ottenuto il diagramma di Figura 17. Per valori estremi del campo di snellezza considerato ( $\lambda=4$  e  $\lambda=20$ ) il tempo di stick assume rispettivamente il suo valore massimo e minimo:  $t_{stick}(4)=2.010$  s,  $t_{stick}(20)=0.933$  s . Tali valori risultano coincidenti con quelli ottenuti per la statua, confermando che il tempo di stick risulta “quasi” indipendente dalla tipologia del manufatto artistico, ma fortemente dipendente dall’eccitazione sismica e dalla snellezza dell’oggetto.

Riassumendo, quindi, le classi di oggetti d’arte studiati, entrano sempre in oscillazione durante l’applicazione della forzante sismica non manifestando mai, una completa fase di pieno contatto. Questa tipologia di comportamento risulta guidata sia dall’intensità della sollecitazione sismica ( $PGA/g$ ), sia dal rapporto geometrico del blocco d’arte considerato.



**Figura 16:** Posizione nel diagramma di flusso (cfr. fig. 8) del Test di uscita



**Figura 17:** Vaso- Tempo di stick base in funzione dei parametri caratteristici

### **Tempo di ribaltamento in funzione della snellezza e del fattore di scala**

Come già indicato, si sono distinti i seguenti *comportamenti del blocco* d’arte soggetto all’accelerogramma di El Centro:

- 1) Pieno contatto (stick) per l’intera durata dell’accelerogramma (cfr. fig. con marcatore ciano) (S.S.)
- 2) Oscillazioni con completo smorzamento prima della cessazione della forzante (cfr. in fig. con marcatore verde) (S.L.)
- 3) Oscillazioni perduranti fino all’applicazione della forzante (cfr. in fig. con marcatore rosso) (S.F.)
- 4) Ribaltamento dopo un certo tempo (cfr. in fig. con superficie)

Al fine della pura distinzione, in riferimento alla presenza della sollecitazione la prima tipologia di stabilità si chiamerà *stabilità per condizione di stick* (S.S.), la seconda si nominerà *stabilità libera* (S.L.), e la terza si definirà *stabilità forzata* (S.F.).

Tenendo conto della (25) si può esprimere la frequenza linearizzata (cfr. 20) della classe di oggetti d’arte come:

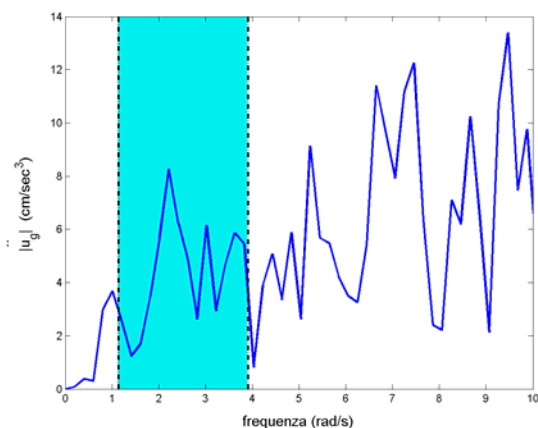


$$p = \sqrt{\frac{g}{R \cdot \left[ \gamma \cdot \left( \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1} \right) + 1 \right]}} \quad (27)$$

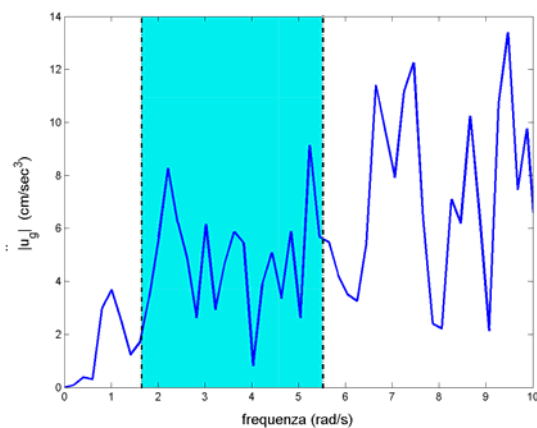
Eseguendo una analisi in frequenza sia dell'eccitazione sia delle classi di oggetti d'arte (Figura 18 e Figura 19) si osserva come la classe di vasi esibisca un numero maggiore di picchi di frequenza dell'eccitazione.

Il risultato dell'analisi multiparametrica della classe di statue considerate viene rappresentato nella Figura 20. E' immediato verificare che il *comportamento tipo 1 non viene mai riscontrato* per la classe di statue considerate. Inoltre si nota come la risposta della statua identificata da  $\lambda_{\max}$  (20) e  $R_{\min}$  (50 cm) risulta instabile (*massima instabilità*), mentre quello della statua con  $\lambda_{\min}$  (4) e  $R_{\max}$  (500 cm) risulta stabile (*massima stabilità*). Si evidenzia l'esistenza di una relazione geometrica, che permette trovare oggetti d'arte a comportamento omogeneo, se sollecitati da forzante sismica. Se infatti si selezionano le classi di statue vicino alla condizione di massima stabilità, si nota come si manifestino risposte dello stesso tipo. Stessa cosa vale, se ci si pone nelle vicinanze della condizione di massima instabilità. Si hanno, quindi, due zone a comportamento opposto ma ben definito, corrispondenti alla classe di statue nell'intorno del duplice accoppiamento tra il valore massimo e minimo dei parametri, snellezza e fattore di scala. Viceversa per la classe di statue facenti parte dell'intorno dei valori massimi di snellezza e del fattore di scala e dei loro valori minimi, la risposta risulta fortemente discontinua (presenza di ribaltamento e di *S.L.*)

Come aveva predetto Housner [1], la stabilità del blocco rigido risulta benevolmente influenzata dal fattore di scala anche se la snellezza, assume un ruolo di primaria importanza. Tale ipotesi è dimostrata dall'estensione della zona a *S.L.* e *S.F.* in direzione parallela ad *R*. Con la crescita del fattore di scala, per valori di snellezza non troppo elevati, si assiste ad un comportamento che al limite tende alla stabilità come è ben evidente nella Figura 20.



**Figura 18:** Zoom del contenuto in frequenza di El Centro e frequenza linearizzate della classe di statue

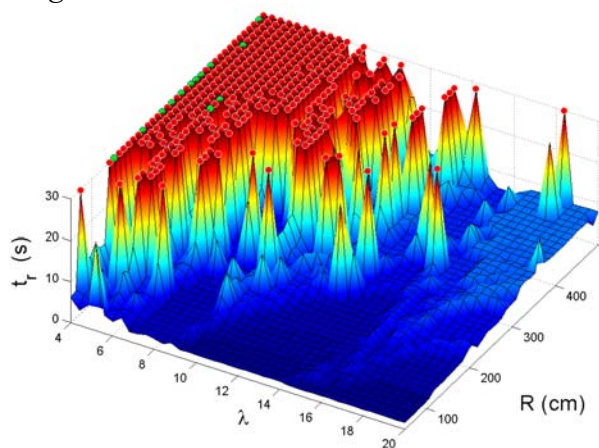


**Figura 19:** Zoom del contenuto in frequenza di El Centro e frequenza linearizzate della classe di vasi

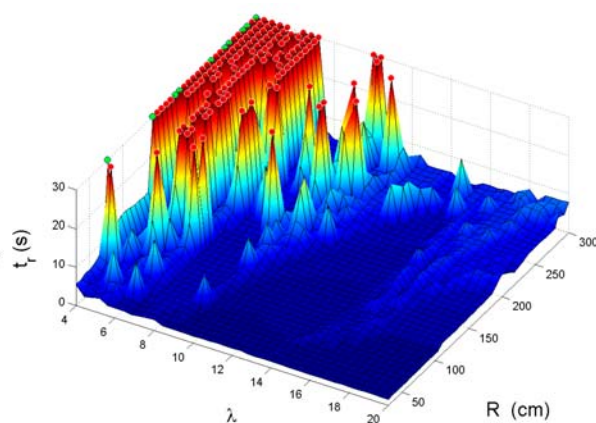
Per quanto riguarda la classe di vasi, si osserva (Figura 21) che il loro comportamento risulta essere in prevalenza instabile. Anche qui, si ritrovano due zone a comportamento omogeneo, l'una stabile per valori di  $R_{\max}$  (300 cm) e  $\lambda_{\min}$  (4), l'altra fortemente instabile per valori di  $R_{\min}$  (30 cm) e  $\lambda_{\max}$  (20). Da evidenziare come l'estensione della zona stabile sia inferiore rispetto al caso delle statue (Figura 20). Questo dovuto soprattutto al fatto che il "vaso base" presenta un valore del fattore di scala inferiore alla "statua base", rispettivamente 61.85 cm contro 103.08 cm. Per le classi di vasi facenti parte dell'intorno dei valori minimi di snellezza e fattore di scala, il comportamento risulta fortemente discontinuo con maggiore presenza di instabilità, ma non sono assenti sporadici casi di stabilità.

In questa analisi si nota ancora meglio come, *la snellezza abbia il ruolo importante nel governare la risposta del sistema*. Infatti se si guarda la Figura 21 si scorge come il marcatore rosso abbia una maggior distribuzione in direzione parallela ad R. Si rileva comunque, che l'aumento del fattore di scala contribuisce a portare il sistema verso un comportamento limite stabile.

Per indagare meglio il comportamento della classe di oggetti d'arte si è ricavata una sorta di *mappa di vulnerabilità sismica* (Figura 22 e Figura 23), visione azimutale del diagramma tridimensionale. Nella mappa non viene riportata la diversificazione del comportamento stabile, in quanto verrà studiata dettagliatamente in seguito. Anche se la snellezza tende ad avere un maggior importanza nella regolazione della risposta del sistema il *comportamento globale* risulta essere quasi diagonale.



**Figura 20:** Classe di statue- Tempo di ribaltamento in funzione della snellezza e del fattore di scala



**Figura 21:** Classe di vasi- Tempo di ribaltamento in funzione della snellezza e del fattore di scala

Cioè le zone a comportamento omogeneo, dello stesso colore nella mappa, tendono ad avere un sviluppo quasi diagonale.

Per analizzare nel dettaglio i due tipi di stabilità che si manifestano, *S.L.* e *S.F.*, si riportano su un diagramma a parte (Figura 24 e Figura 25). Per la classe di statue la *S.F.* (marcatore verde) si presenta prevalentemente per  $\lambda=4$  ed  $R \geq 150$  cm. Su un numero totale di  $41 \times 41 = 1681$  statue sottoposte all'analisi sismica tale configurazione si presenta 13 volte. Si ha quindi il 0.77% di probabilità di trovarsi in questo specifico caso. La *S.L.* (marcatore rosso) mostra una maggiore concentrazione verso valori di  $\lambda_{min}$  e  $R_{max}$  e presenta una maggior dispersione aumentando la snellezza piuttosto che il fattore di scala. Il numero di campioni rilevati con tale tipo di comportamento risulta uguale a 332, quindi la probabilità di ricadere in questo caso sul numero totale di simulazioni effettuate è pari al 19.75%.

Può essere definito nella mappa di stabilità (Figura 24 linea tratto-punto) un *campo di piena stabilità* come l'area all'interno del triangolo che ha come vertice (4, 196.25 cm) e come estremo della base (8, 500 cm). Se la statua in esame appartiene a questo range di valori durante l'evento sismico (El Centro) sicuramente non ribalta. Se invece cade esternamente, abbiamo una certa probabilità che divenga instabile tanto prima quanto più il valore della snellezza è elevato e quanto quello del fattore di scala è piccolo.

Analizzando i comportamenti asintotici della classe di vasi (Figura 25), si evidenzia come la *S.F.* (marcatore verde) sia presente solo per il valore di snellezza più piccolo (4) e per valori di  $R \geq 77.25$  cm. Su un numero totale di  $41 \times 41 = 1681$  vasi sottoposti all'analisi, questo tipo di comportamento si è manifestato solo 10 volte. Perciò la probabilità di avere *S.F.* risulta pari ad un 0.59%. La *S.L.* (marcatore rosso), invece, ha una maggiore concentrazione per valori di  $\lambda_{min}$  e  $R_{max}$  e se confrontata con quella per la classe di statue (cfr. Figura 24) si nota come quest'ultima risulti complessivamente più stabile. Il numero totale di campioni rilevato con questo comportamento è

pari a 127, quindi la probabilità di ricadere nella stessa risposta, sul numero totale di simulazioni effettuate, è il 7.56% (meno della metà rispetto alla classe di statue).

Anche in questo caso si può definire all'interno della mappa di stabilità (Figura 25 linea tratto-punto) un *campo di piena stabilità* come l'area delimitata dal triangolo che ha come vertice il punto (4, 198.75 cm) e come estremo della base il punto (5.6, 300 cm). Se il vaso appartiene a questo piccolo range sicuramente sopravvive all'evento sismico (El Centro) senza ribaltare.

E' evidente la somiglianza della mappa per la *S.L.* e *S.F.* della due classi di oggetti, tanto che il campo di piena stabilità per la classe di vasi (Figura 25) risulta essere circa una porzione del campo di piena stabilità della classe di statue (Figura 24). Questo sottolinea ancora di più che il comportamento di un blocco rigido investito da un'accelerogramma al piede è molto sensibile alla variazione dei parametri geometrici del corpo che non alla variazione del momento di inerzia rotazionale.

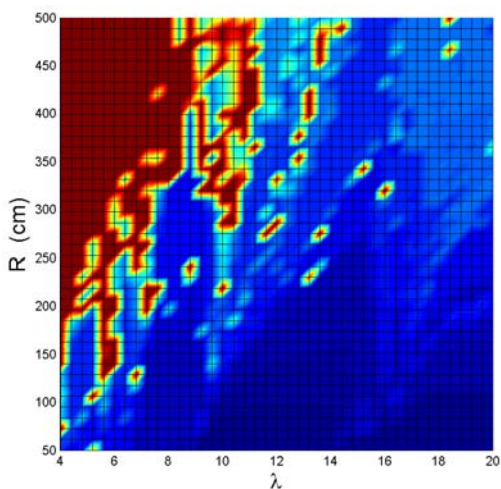


Figura 22: Classe di statue- Mappa di vulnerabilità sismica

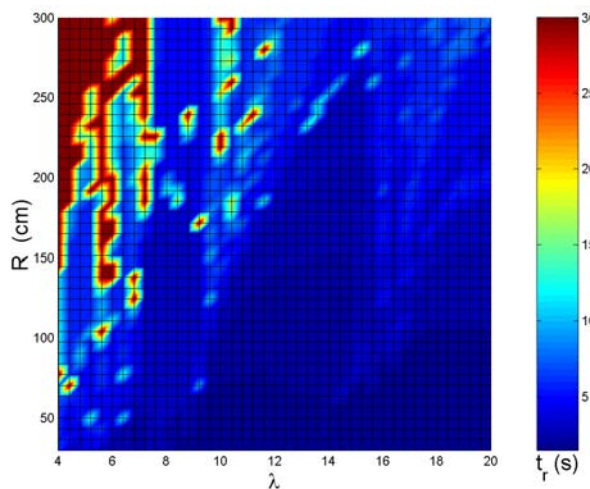


Figura 23: Classe di vasi- Mappa di vulnerabilità sismica

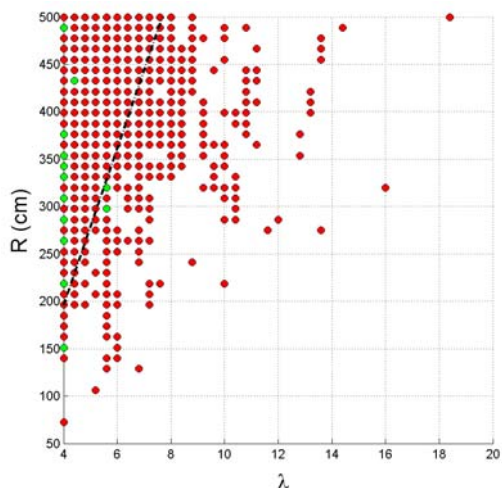


Figura 24: Classe di statue- Mappa di stabilità

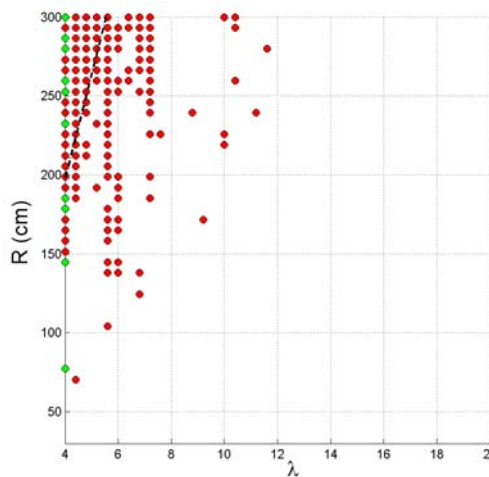


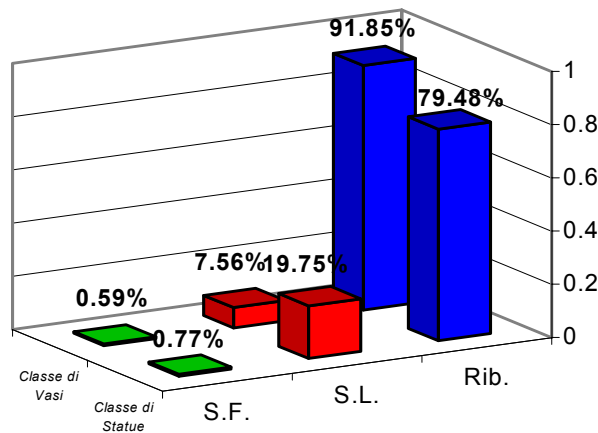
Figura 25: Classe di vasi- Mappa di stabilità

I risultati ottenuti, per le simulazioni eseguite sulla classe di statue e sulla classe di vasi, si riassumono nella Figura 26. Per la classe di vasi studiati si ha, come si vede, una diminuzione dei comportamenti stabili ed un aumento di quello instabile. Quindi il loro comportamento sotto eccitazione sismica, risulta più instabile rispetto alla classe di statue fondamentalmente per il minor fattore di scala esibito.

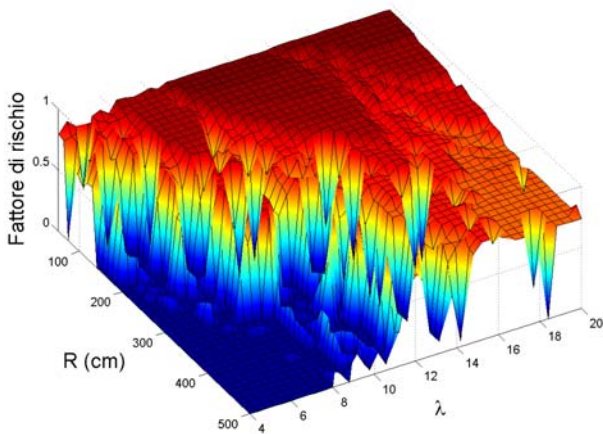
Per rendere ancora più esplicito tale risultato si è costruito un diagramma tridimensionale del *fattore di rischio* al variare della snellezza e del fattore di scala (Figura 27). Il fattore di rischio vale 0 se il comportamento è stabile (colore blu scuro), mentre vale 1 se il ribaltamento dell'oggetto



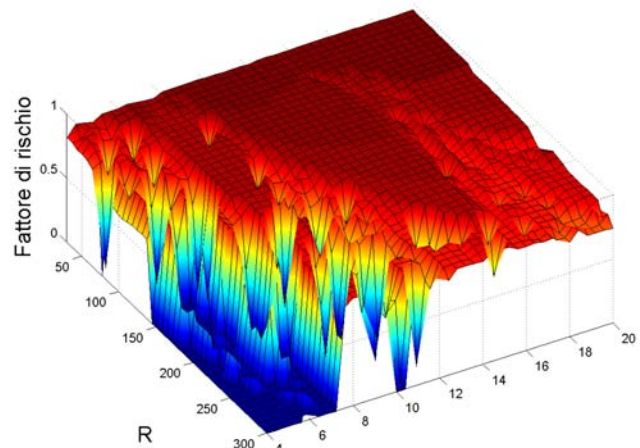
avviene all'istante di applicazione della forzante. Si osserva come passando dalla classe di statue alla classe di vasi la zona a fattore di rischio nullo diminuisca e come quindi quest'ultima sia maggiormente vulnerabile all'accelerogramma di El Centro.



**Figura 26:** Riassunto simulazioni eseguite sugli oggetti d'arte soggetti ad "El Centro"



**Figura 27:** Classe di statue- Fattore di rischio in funzione dei parametri caratteristici



**Figura 28:** Classe di vasi- Fattore di rischio in funzione dei parametri caratteristici

### **Risposta dell'oggetto d'arte al terremoto di Kobe e ad accelerogrammi pseudoartificiali**

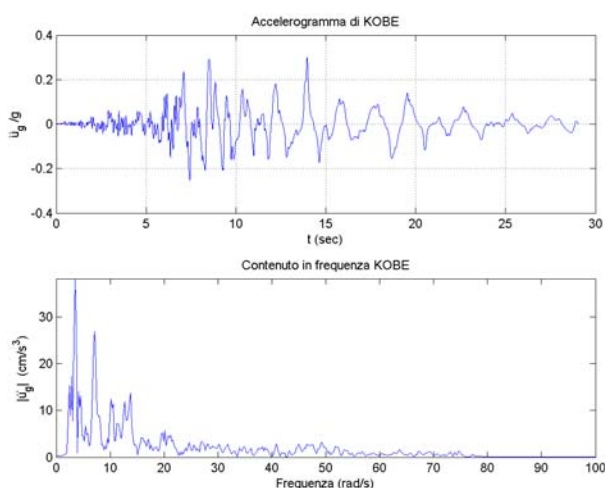
Al fine di valutare l'influenza delle caratteristiche dell'eccitazione sulla risposta dell'oggetto d'arte, è stata studiata la risposta di una classe di statue soggette ad un accelerogramma al piede registrato ad Amagasaki (N30W) durante il terremoto di Kobe, avvenuto il 17 gennaio del 1995 in Giappone. Dallo spettro dell'accelerogramma (Figura 29 in basso), ricavato attraverso la trasformata di Fourier, si nota un basso contenuto in frequenza fino ad una pulsazione pari  $2 \text{ rad/s}$ , per avere poi un picco di potenza intorno ai  $3.5 \text{ rad/s}$ . Il "segnale sismico" presenta una  $PGA/g \approx 0.3$  ed un range di frequenze dominanti nell'intervallo  $2 \leq \omega \leq 50 \text{ rad/s}$ . Facendo un confronto tra l'accelerogramma di El Centro (Figura 30 in rosso) e quello di Kobe si nota come l'accelerazione del primo sia superiore almeno per i primi 7 secondi e come l'ultimo ecciti maggiormente la frequenze concentrate nell'intervallo  $2 \leq \omega \leq 8 \text{ rad/s}$ .

Si è pensato inoltre di sottoporre la classe di statue ad una serie di accelerogrammi con  $PGA$  circa costante ma con frequenze fondamentali crescenti, con lo scopo di studiare la loro vulnerabilità in funzione della frequenza caratteristica del sisma. Gli accelerogrammi pseudoartificiali utilizzati, sono stati generati da quello di Kobe moltiplicandolo per un'onda sinusoidale del tipo:

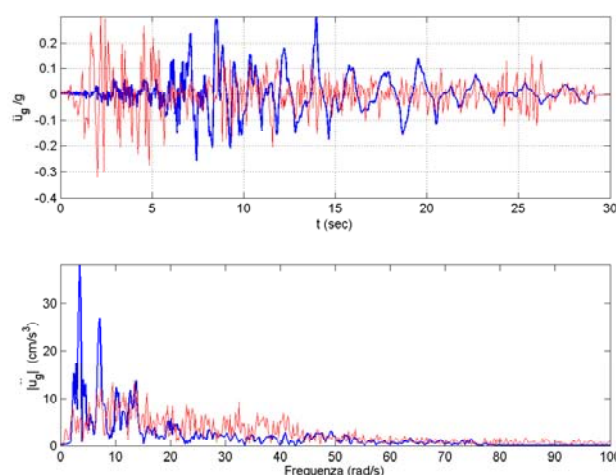
$$y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi) \quad (28)$$

con ampiezza,  $A$ , frequenza,  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$  e fase,  $\varphi$ . Gli accelerogrammi modificati così ottenuti sono stati normalizzati in modo da presentare la stessa PGA dell'accelerogramma di Kobe. Si riportano nelle seguenti tabelle le caratteristiche dell' $i$ -esima onda sinusoidale che moltiplicata per l'accelerogramma di base da luogo ad ogni nuovo  $i$ -esimo sisma, e nelle figure seguenti l'andamento degli accelerogrammi artificiali.

L'accelerogramma artificiale denominato Kobe 1 e la sua FFT (Figura 31 in alto a sinistra) presenta un range di frequenze dominanti nell'intervallo  $0 \leq \omega \leq 40 \text{ rad/s}$ . Se si confronta lo spettro di questo accelerogramma con quello di partenza (Figura 29) è immediato vedere che la potenza delle armoniche principali si è circa dimezzata ed inoltre come il segnale sia costituito da un maggior numero di armoniche. Le frequenze dominanti dell'accelerogramma di Kobe 2 (Figura 31 in alto a destra) sono comprese negli intervalli  $0 \leq \omega < 11$  e  $15 \leq \omega \leq 40 \text{ rad/s}$ . L'accelerogramma di Kobe 3 (Figura 31 in basso a sinistra) manifesta le armoniche significative negli intervalli  $0 \leq \omega < 17$  e  $21 \leq \omega \leq 35 \text{ rad/s}$ . Infine quello di Kobe 4 (Figura 31 in basso a destra) ha un contenuto in frequenze principali nei range  $3.5 \leq \omega < 23$  e  $27 \leq \omega \leq 40 \text{ rad/s}$ .



**Figura 29:** Accelerogramma di Kobe con relativo contenuto in frequenza



**Figura 30:** Confronto accelerogramma di Kobe ed El Centro (1940)

**Tabella 5.4:** Caratteristiche delle onde sinusoidali moltiplicanti l'accelerogramma di base

	$f$ (Hz)	$A$ (cm/s <sup>2</sup> )	$\varphi$ (rad)
<b>y1</b>	1	1.04	$\pi/2$
<b>y2</b>	2	1.08	$0.8 \pi$
<b>y3</b>	3	1.05	$1.6 \pi$
<b>y4</b>	4	1.08	$0.3 \pi$

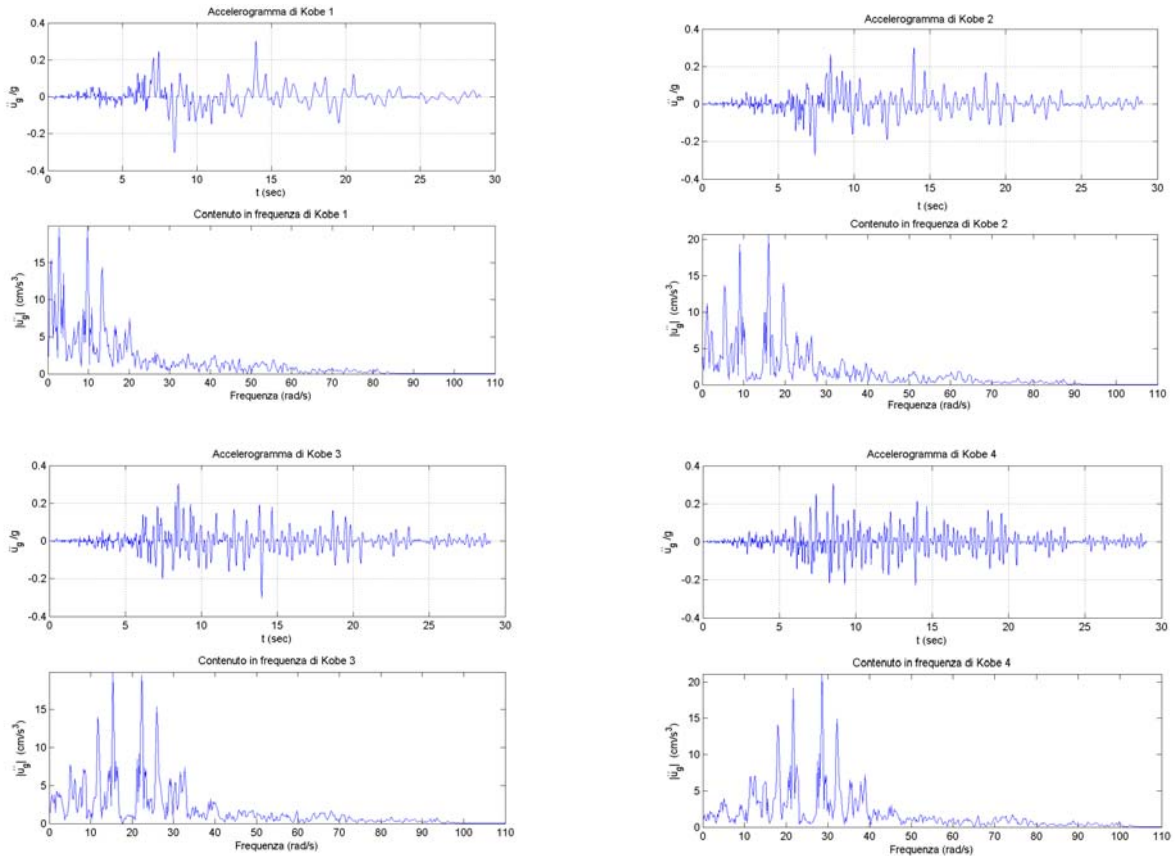
### Analisi multiparametrica della classe di statue

Dall'analisi in frequenza dell'eccitazione, evidenziando lo spettro di frequenze linearizzate della classe di statue considerate (cfr. 27), si sono ottenuti i diagrammi di Figura 32, 33, 34, 38 e 39. È ben visibile come, passando da "Kobe" a "Kobe4", il sisma ecciti sempre meno la classe di oggetti d'arte. Si ha conferma di tale tipo di comportamento, diagrammando il tempo di ribaltamento della classe di statue in funzione della snellezza e del fattore di scala (Figura 35, 36, 37, 40 e 41). Variando l'eccitazione da "Kobe" a "Kobe4" si ha una diminuzione della zona a ribaltamento indicata con il colore blu e un aumento della zone stabili evidenziate con i marcatori.

Per illustrare meglio i confini della risposta della classe di statue soggette all'accelerogramma di Kobe e agli accelerogrammi pseudoartificiali, sopra indicati, sono state ricavate delle mappe di

vulnerabilità sismica (Figura 42, 43, 44, 45 e 46). Si rileva come mantenendo la *PGA* dell'eccitazione sismica pari a circa 0.3g e aumentandone le inversioni di segno attraverso il “filtro sinusoidale”, il comportamento del sistema tenda verso la stabilità con un comportamento quasi diagonale (aumento della zona rossa).

Questo dimostra come entrambi i parametri, snellezza e fattore di scala, influiscono sulla sua stabilità anche il primo ha un ruolo di maggiore importanza.

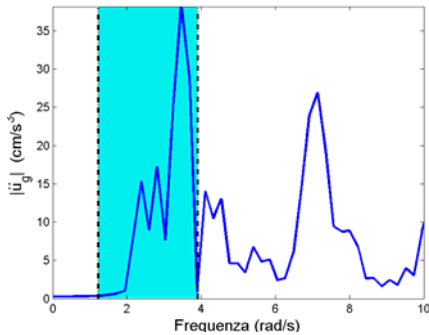


**Figura 31:** Accelerogrammi pseudoartificiali generati da Kobe e loro contenuto in frequenza

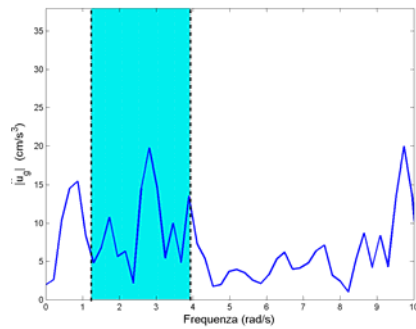
Analizzando la stabilità della classe di statue soggette a “Kobe” (Figura 47) si nota come la *S.S.* si manifesti solamente valori di snellezza piccoli (4, 4.4) incrementando la sua distribuzione all’aumentare del fattore di scala per arrivare ad una snellezza di 5.6 con  $R=500$  cm per un totale di 151 campioni. Si ha quindi, un 8.98 % di probabilità di trovarsi in questo specifico caso. Tra tutti i campioni considerati il comportamento di *S.F.* non viene mai esibito. Per quanto riguarda la *S.L.* i suoi valori risultano molto più dispersi (34 campioni) con maggior presenza per snellezze comprese nell’intervallo  $6.8 \leq \lambda \leq 7.2$  per fattori di scala  $370 \leq R \leq 430$  cm. La probabilità, rispetto al numero complessivo di simulazioni, di ricadere in tale comportamento risulta pari al 2.02 %.

Nello studio della stabilità per “Kobe1” (Figura 48) si osserva come la *S.S.* si presenti solo per  $\lambda=4$  e per valori di snellezza maggiori di  $R \geq 398.75$  cm. Tale comportamento su un totale di  $41 \times 41 = 1681$  campioni si è presentato solo 10 volte quindi con probabilità pari a circa 0.59 %. La *S.F.* si manifesta invece per valori di  $\lambda$  pari a 5.2 e per valori del fattore di scala compresi nell’intervallo  $106.25 \leq R \leq 443.45$  cm. Il numero di campioni rilevati con tale risposta sono 31, perciò la probabilità di ricadere in tale comportamento è il 1.84 %. Solo per alcuni valori del fattore di scala (466.25 cm, 432.5 cm, 410 cm), aumentando la snellezza, la risposta presenta un graduale passaggio da *S.S.* a *S.F.* fino a *S.L.*. Incrementando il fattore di scala per valori di  $\lambda < 9.2$  la *S.L.*

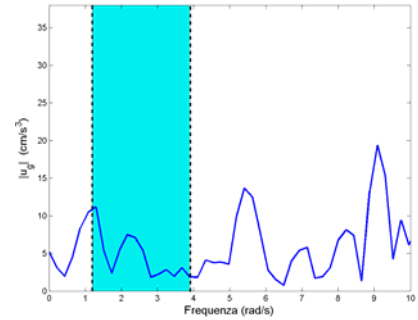
aumenta la sua distribuzione per un totale di 190 campioni. La probabilità per tale tipo risposta è del 11.30 %.



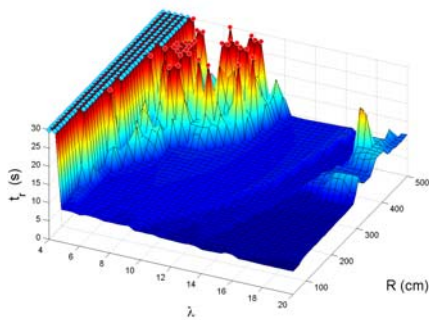
**Figura 32:** Confronto in frequenza acc. di Kobe e classe di statue



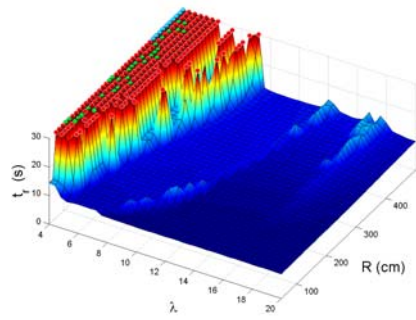
**Figura 33:** Confronto in frequenza acc. di Kobe 1 e classe di statue



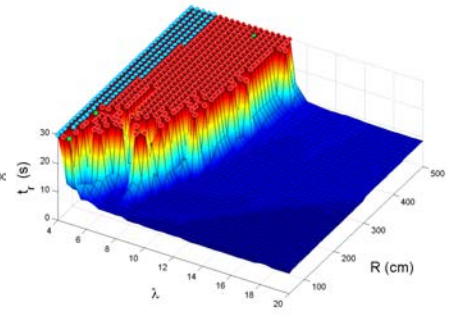
**Figura 34:** Confronto in frequenza acc. di Kobe 2 e classe di statue



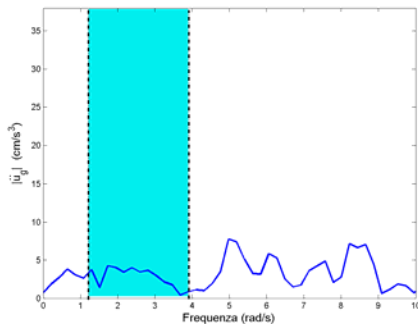
**Figura 35:** Kobe- Tempo di ribalt. in funzione di  $\lambda$  e  $R$



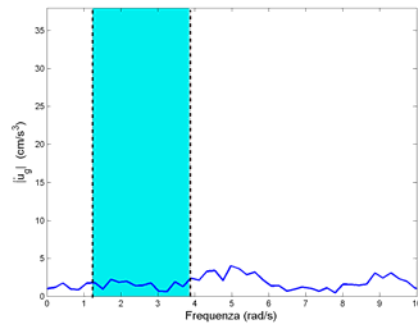
**Figura 36:** Kobe1- Tempo di ribalt. in funzione di  $\lambda$  e  $R$



**Figura 37:** Kobe2- Tempo di ribalt. in funz. di  $\lambda$  e  $R$



**Figura 38:** Confronto in frequenza acc. di Kobe 3 e classe di statue



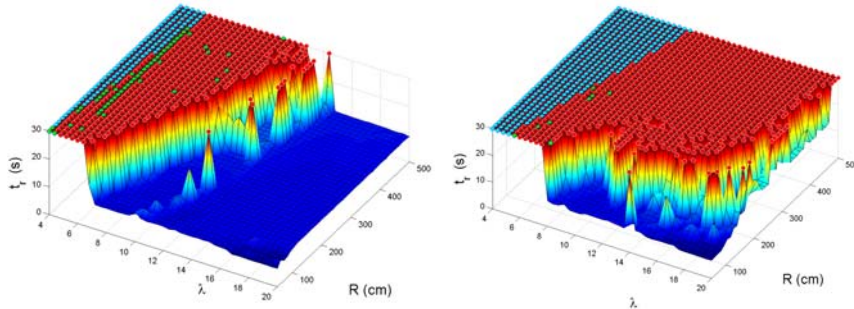
**Figura 39:** Confronto in frequenza acc. di Kobe 4 e classe di statue

Per “Kobe2” la mappa di stabilità (Figura 49) mette in luce come la *S.S.* si manifesti per tutto il campo del fattore di scala per  $\lambda=4$  a differenza del caso precedente, ed ha un andamento analogo a quello riscontrato per Kobe (cfr. Figura 47). Essa si presenta ben 140 volte, avendo una probabilità di comparsa dell’ 8.33%. La *S.F.* viene assunta per valori del fattore di scala molto diversi ( $R=50\text{ cm}$ ,  $R=140\text{ cm}$ ,  $R=477.5\text{ cm}$ ), per soli 3 campioni, con una probabilità perciò del 0.19%. La *S.L.* è il comportamento stabile più frequente, con una sua maggiore concentrazione per valori di  $R \geq 263.75\text{ cm}$  e per valori di  $\lambda \leq 10.8$ . Il numero totale di campioni rilevati con tale tipo di comportamento risulta uguale a 370, ne segue che la sua probabilità è pari al 22%.

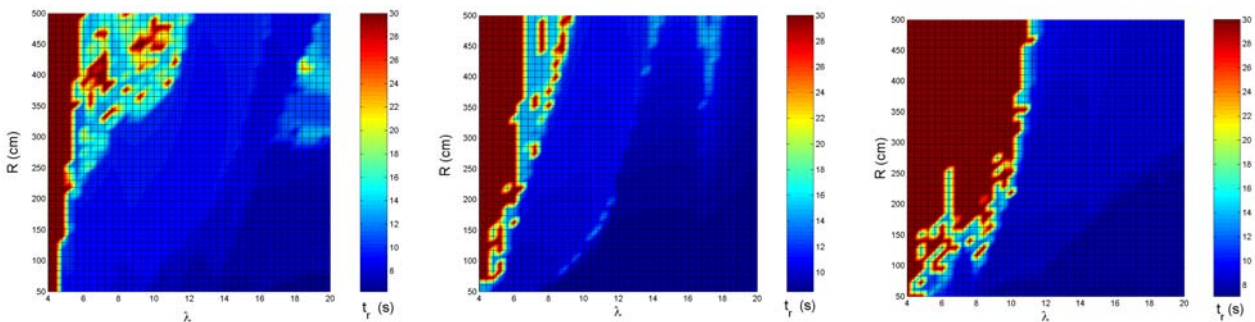
Per indagare la stabilità della casse di statue soggette a “Kobe3” si fa riferimento alla mappa riportata in Figura 50. La *S.S.* si manifesta solo per valori di snellezza fino 5.6 e aumenta la sua distribuzione con l’incremento del fattore di scala. Tale tipo di comportamento è stato riprodotto per 114 campioni, presenta quindi una probabilità del 6.78%. La maggior distribuzione di *S.F.* si ha per



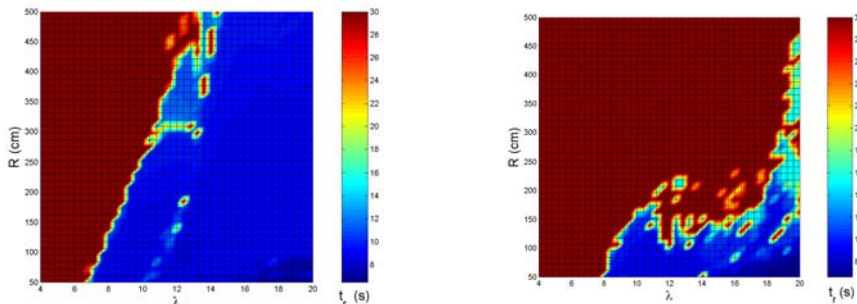
$\lambda=5.6$  nel range  $83.75 \leq R \leq 443.75$  cm, sottolineando come anche questo tipo di stabilità sia dipendente dalla snellezza dell'oggetto d'arte. Il numero di campioni rilevati con tale tipo di comportamento sono 53, quindi la loro probabilità risulta pari al 3.15%.



**Figura 40:** Kobe3- Tempo di ribalt. in funzione di  $\lambda$  e R **Figura 41:** Kobe4- Tempo di ribalt. in funzione di  $\lambda$  e R



**Figura 42:** Mappa di vulnerabilità sismica per Kobe **Figura 43:** Mappa di vulnerabilità sismica per Kobe1 **Figura 44:** Mappa di vulnerabilità sismica per Kobe2



**Figura 45:** Mappa di vulnerabilità sismica per Kobe3 **Figura 46:** Mappa di vulnerabilità sismica per Kobe4

La *S.L.* ha una maggiore concentrazione per  $\lambda > 5.6$  e per  $R > 150$  cm oltre che intorno ai valori piccoli di snellezza e fattore di scala. Essa ha un numero totale di 487 casi con una probabilità di comparsa, perciò, del 28.97%.

Infine considerando “Kobe4” (Figura 51) si rileva come la *S.S.* si presenti inizialmente per  $R=50$  cm e per  $4 \leq \lambda \leq 5.2$ . Incrementando il fattore di scala la snellezza limite superiore cresce meno che proporzionalmente per arrivare a  $R=500$  cm con  $4 \leq \lambda \leq 500$ . Il numero totale di campioni con tale comportamento risulta uguale a 355, quindi la loro probabilità di comparsa è uguale a 21.12%. La *S.F.* si presenta raramente, 5 volte, per valori di  $R < 250$  cm e  $5.6 \leq \lambda \leq 8$ . La probabilità di ricadere in tale tipo di comportamento risulta uguale al 0.48%. Prendendo in considerazione la *S.L.* si osserva, come si presenti in poche unità per valori minimi del fattore di scala (50 cm) per avere la sua maggiore estensione per il valore massimo di R (500 cm); risulta essere, quindi, inversamente proporzionale alla snellezza ma anche direttamente proporzionale al fattore di scala. Il numero di campioni con tale comportamento è di 946, perciò la probabilità di trovarsi in *S.L.* è del 56.28%. Complessivamente la probabilità di avere un comportamento stabile è pari al 78.88%.



In una visione d'insieme delle mappe di stabilità è evidente come la *zona a piena stabilità* della classe di statue, identificata dall'area che ha come confine la retta tratto-punto, sia notevolmente aumentata passando da "Kobe" a "Kobe4" sottolineando come la risposta del sistema non dipenda dalla *PGA* dell'accelerogramma (come invece è per l'uscita della fase di stick) ma dal suo contenuto in frequenza.

Si riassumono i risultati ottenuti in forma percentuale, nei seguenti due istogrammi, per ottenere un confronto sintetico dei vari casi studiati. Riportando il confronto tra le analisi eseguite per la classe di statue con accelerogrammi El Centro e con quello di Kobe (Figura 52), si osserva come si presentino comportamenti stabili nettamente distinti e come la classe di oggetti risulti maggiormente vulnerabile al terremoto di Kobe.

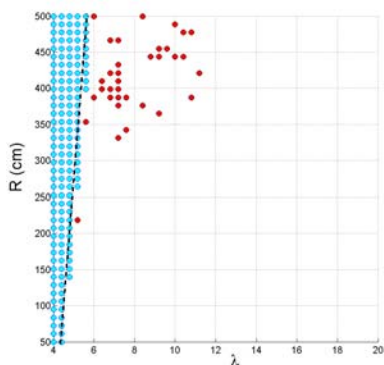


Figura 47: Mappa della stabilità per Kobe

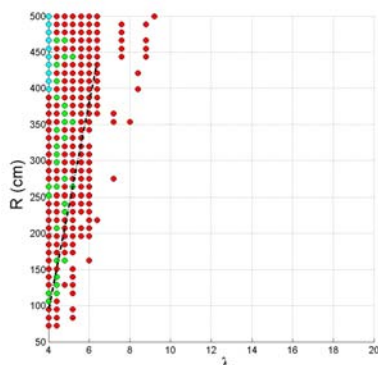


Figura 48: Mappa della stabilità per Kobe1

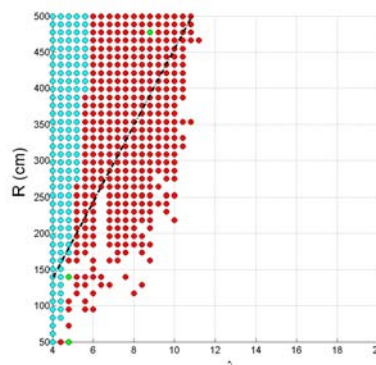


Figura 49: Mappa della stabilità per Kobe2

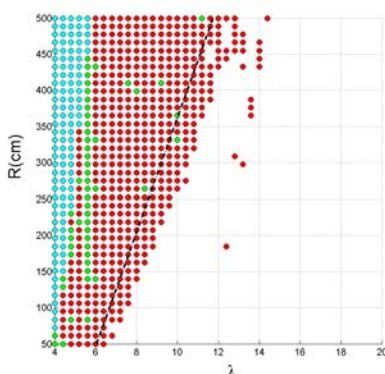


Figura 50: Mappa della stabilità per Kobe3

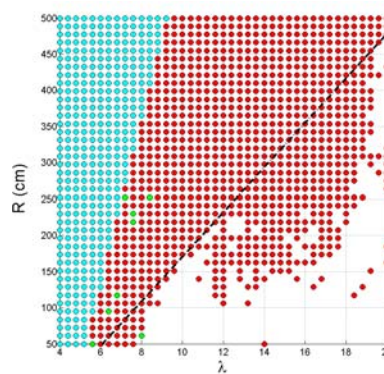


Figura 51: Mappa della stabilità per Kobe4

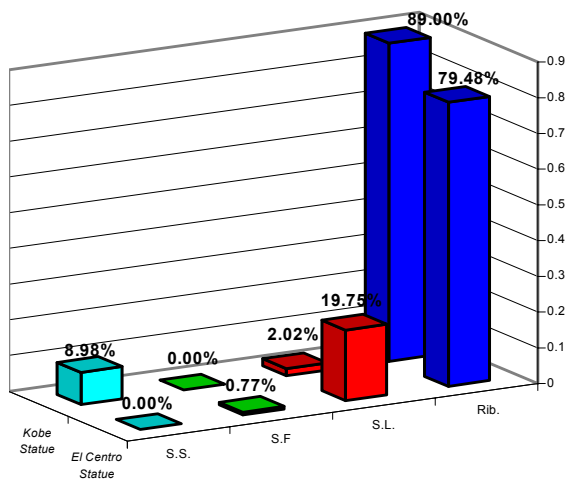
Il secondo confronto effettuato per la stessa classe di statue con diversi accelerogrammi pseudoartificiali (Figura 53) mostra come, aumentando la frequenza caratteristica del sisma e mantenendone la *PGA* circa costante, il comportamento del sistema tenda verso la stabilità.

### **Risposta dell'oggetto d'arte ad accelerogrammi con vari fattori di amplificazione**

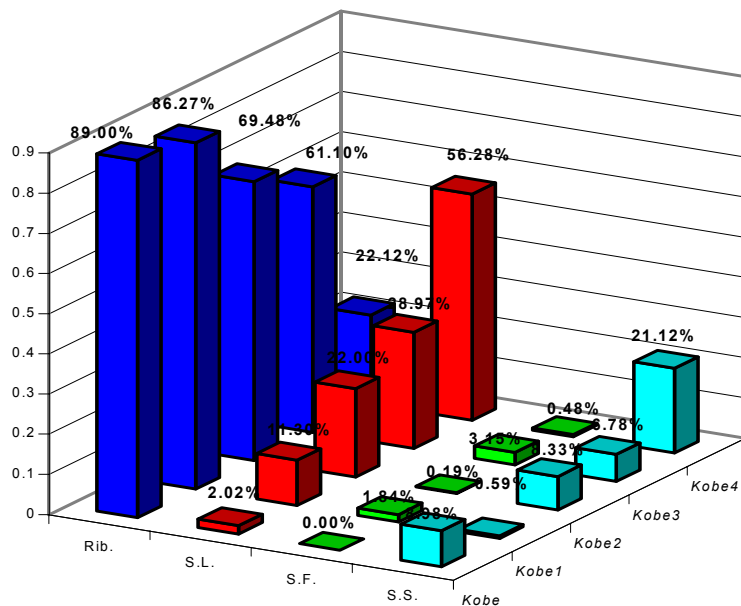
La vulnerabilità degli oggetti d'arte è stata studiata ipotizzando di sottoporre la classe di statue all'accelerogramma di Kobe secondo differenti fattori di amplificazione. La denominazione, natura e le caratteristiche salienti di tali eccitazioni sono state riportate nella Tabella 5.

Rappresentando il tempo di ribaltamento della classe di statue in funzione di entrambi i parametri (Figura 54, 55, 56, 57, 58, 59 e 60) si nota come passando dall'accelerogramma di "Kobe A1" a quello di "Kobe A6" il comportamento del sistema tenda sempre più verso l'instabilità.

Per l'accelerogramma di "Kobe A1" (Figura 55) si ha un notevole aumento della stabilità (rispetto al caso di Kobe), in particolare *S.S.* e *S.L.* per i valori di  $\lambda_{max}(20)$  e per valori del fattore di scala elevati.



**Figura 52:** Confronto dei risultati per la classe di statue per Kobe ed El Centro



**Figura 53:** Confronto dei risultati per la classe di statue per Kobe ed accelerogrammi pseudoartificiali

Eseguendo l'analisi per il record di "Kobe A2", si osserva (Figura 56) come non si presentino più casi di *S.S.*, ed i restanti casi stabili si riscontrino per bassi valori di  $\lambda$  e per elevati valori  $R$ . Per l'accelerogramma di "Kobe 3" (Figura 57) si registra la scomparsa anche della *S.F.*, e la diminuzione dei casi di *S.L.*. Analizzando gli ultimi tre casi (Kobe A4, Kobe A5 e Kobe A6) si nota il progressivo diminuire delle picchi della superficie, per lasciare il posto ad un comportamento instabile.

Per avere una visione più accurata del comportamento della classe di statue, si riportano i risultati su mappe di vulnerabilità sismica (Figura 61, 62, 63, 64, 65, 66 e 67). Dalle mappe di vulnerabilità è ben evidente come il comportamento stabile si riduca fortemente per lasciare spazio ad una risposta instabile con tempo di ribaltamento che, per valori di snellezza elevati e fattori di scala piccoli, tende circa a 15 sec.

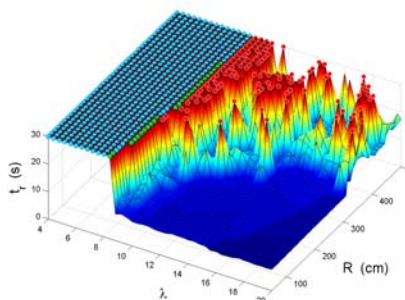
Infine si commentano le tipologie e la distribuzione di stabilità della classe di statue attraverso l'elaborazione di apposite mappe in funzione di  $\lambda$  e di  $R$  (Figura 68, 69, 70, 71, 72, 73 e 74). Per l'accelerogramma di "Kobe A1" (Figura 68) si nota come la *S.S.* si presenta per  $R_{min}$  (50 cm) e per  $4 \leq \lambda \leq 8$ , aumentando la sua distribuzione con il fattore di scala per arrivare ad  $R_{max}$  (500 cm) con  $\lambda=9.2$ , per un totale di 526 campioni, con una percentuale di comparsa del 31.29%.

La *S.F.* si manifesta per valori di snellezza pari a 8.04, 8.08 e 8.12 fino a valori di  $R=398.75$  cm, in un numero di 26 campioni (1.55%). Il comportamento di *S.L.* presenta una duplice distribuzione: più concentrata per  $9.2 \leq \lambda \leq 10.8$  per  $R \geq 200$  cm, mentre più dispersa per valori di  $\lambda > 10.8$  cm. Tale tipologia di risposta viene rilevata in un numero di campioni pari a 120 (7.4%). Si osserva come il confine della zona di piena stabilità (retta tratto-punto) abbia circa la stessa pendenza nel passaggio dall'accelerogramma di Kobe A1 a quello di Kobe (Figura 69), nonostante per quest'ultimo i casi stabili siano in notevole diminuzione.

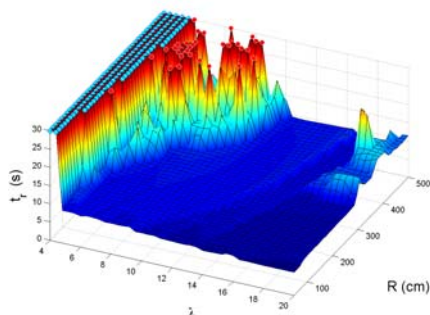
Analizzando la mappa per il record di "Kobe A2" (Figura 70) si nota come la *S.F.* si presenti solo per  $\lambda=5.6$  e  $R=455$  cm (0.06%). La *S.L.* si presenta abbastanza dispersa, aumentando il numero di campioni con l'incremento del fattore di scala per un totale di 48 (2.85%). Per quanto riguarda l'accelerogramma di "Kobe A3" si rilevano un totale di 19 campioni (1.13%) con comportamento stabile (*S.L.*) per valori di  $R > 398.75$  cm, maggiormente presenti per valori di  $\lambda=4$  e  $\lambda=5.6$ .

**Tabella 5:** Caratteristiche dell'eccitazione sismica

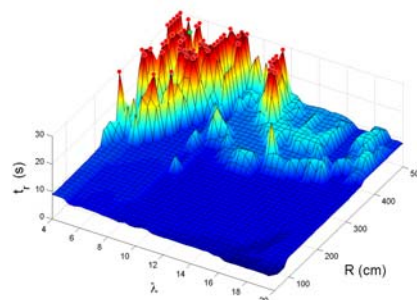
Denominazione	Origine	PGA/g	$\max \ddot{u}_g $ (cm/sec <sup>3</sup> )
<i>Kobe-A1</i>	<i>0.5·Kobe</i>	<i>0.15</i>	<i>19.08</i>
<i>Kobe</i>	<i>1.0·Kobe</i>	<i>0.30</i>	<i>38.15</i>
<i>Kobe-A2</i>	<i>1.5·Kobe</i>	<i>0.45</i>	<i>57.22</i>
<i>Kobe-A3</i>	<i>2.0·Kobe</i>	<i>0.60</i>	<i>76.30</i>
<i>Kobe-A4</i>	<i>2.5·Kobe</i>	<i>0.75</i>	<i>95.38</i>
<i>Kobe-A5</i>	<i>3.0·Kobe</i>	<i>0.90</i>	<i>114.45</i>
<i>Kobe-A6</i>	<i>3.5·Kobe</i>	<i>1.05</i>	<i>133.53</i>



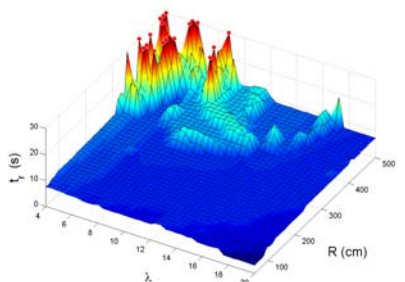
**Figura 54:** *Kobe A1- Tempo di ribalt. in funzione di  $\lambda$  e R*



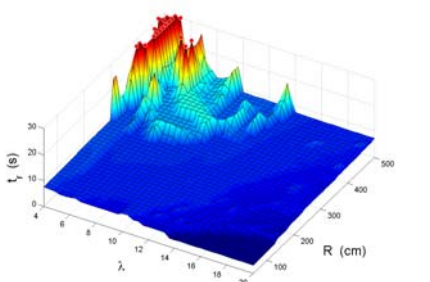
**Figura 55:** *Kobe - Tempo di ribalt. in funzione di  $\lambda$  e R*



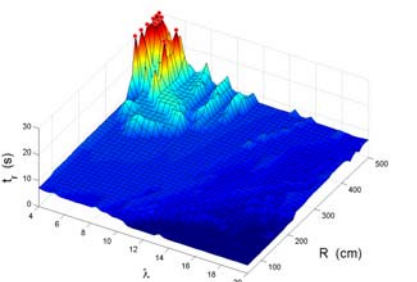
**Figura 56:** *Kobe A2- Tempo di ribalt. in funzione di  $\lambda$  e R*



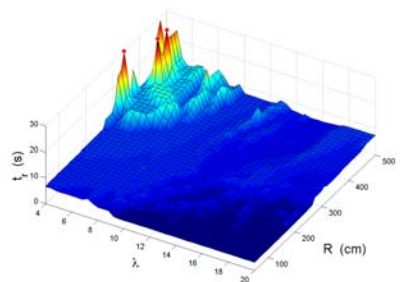
**Figura 57:** *Kobe A3- Tempo di ribalt. in funzione di  $\lambda$  e R*



**Figura 58:** *Kobe A4- Tempo di ribalt. in funzione di  $\lambda$  e R*



**Figura 59:** *Kobe A5- Tempo di ribalt. in funzione di  $\lambda$  e R*



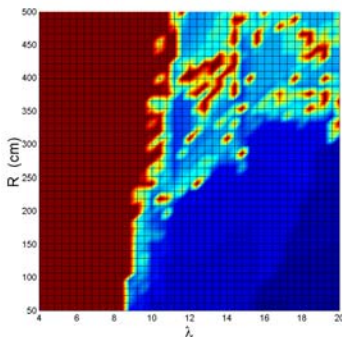
**Figura 60:** *Kobe A6- Tempo di ribalt. in funzione di  $\lambda$  e R*

Anche per il sisma di “Kobe A4” (Figura 72) si hanno 19 campioni con *S.L.*, ma con maggior distribuzione intorno alle snellezze pari a 4.4 e 4.6. Per l’accelerogramma di “Kobe A5” (Figura 73) si registrano 11 soli casi di *S.L.* (0.65%), fino a valori di  $\lambda$  pari a 6. Il comportamento della classe di statue soggette al record di “Kobe A6” (Figura 74) è stabile solo per 3 campioni (0.18%) fino a valori di  $\lambda$  pari a 5.2.

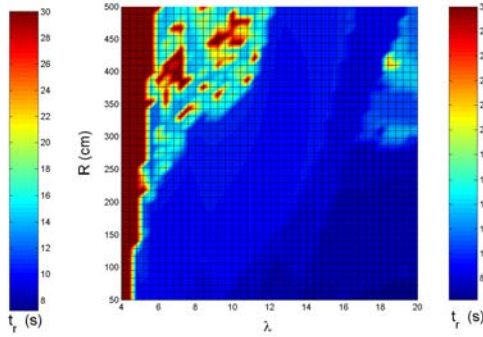
Il riassunto in termini probabilistici delle analisi della classe di statue soggetta ad accelerogrammi con vari fattori di amplificazione è illustrato in Figura 75. Si riscontra come



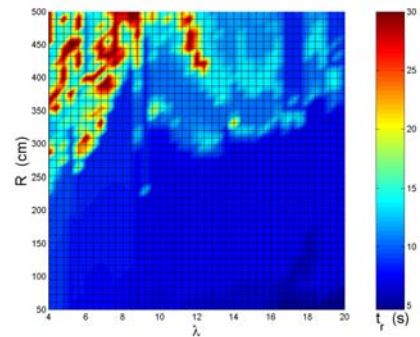
muovendosi dal fattore di amplificazione pari a 0.5 (Kobe A1) ad uno pari a 3.5 (Kobe A6) si abbia un notevole incremento del comportamento instabile (ribaltamento) e una riduzione di quello stabile, quindi come la classe di oggetti d'arte sia maggiormente vulnerabile all'eccitazione con amplificazione più elevata.



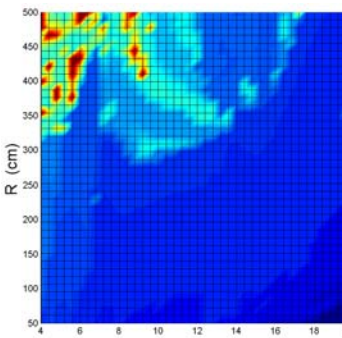
**Figura 61:** *Mappa di vulnerabilità sismica per Kobe A1*



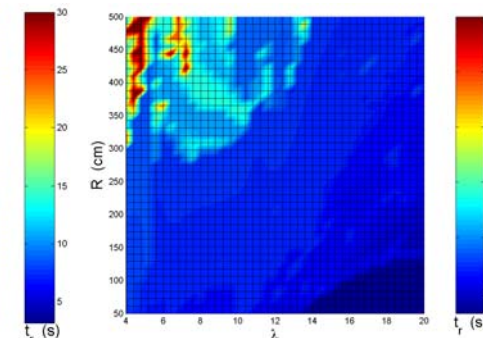
**Figura 62:** *Mappa di vulnerabilità sismica per Kobe*



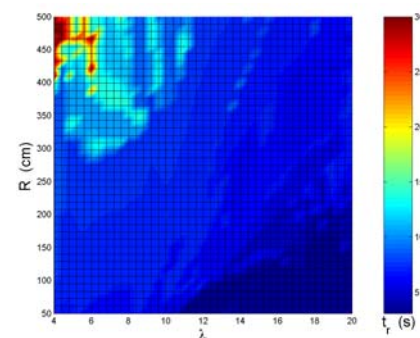
**Figura 63:** *Mappa di vulnerabilità sismica per Kobe A2*



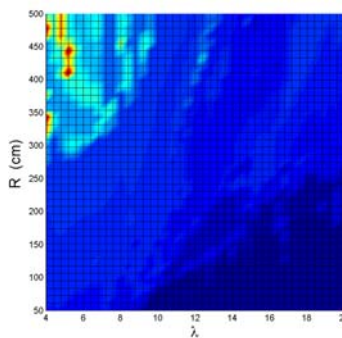
**Figura 64:** *Mappa di vulnerabilità sismica per Kobe A3*



**Figura 65:** *Mappa di vulnerabilità sismica per Kobe A4*



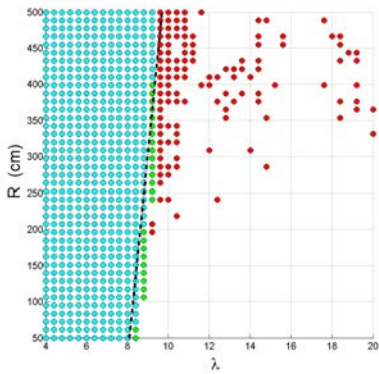
**Figura 66:** *Mappa di vulnerabilità sismica per Kobe A5*



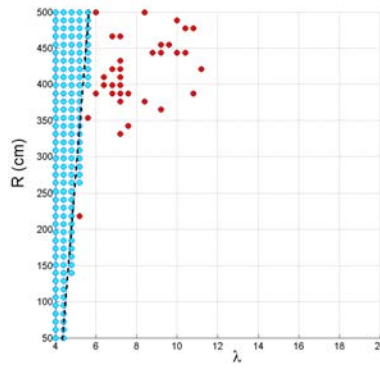
**Figura 67:** *Mappa di vulnerabilità sismica per Kobe A6*

### **Conclusioni e sviluppi futuri**

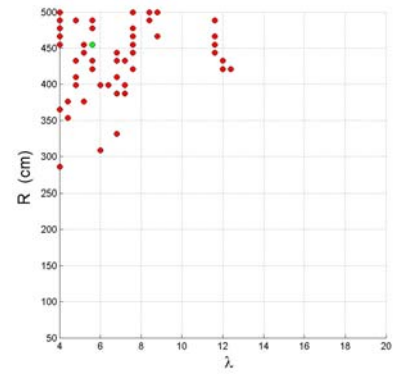
Con questa articolo si è voluto indagare il comportamento dinamico degli oggetti d'arte attraverso il modello semplificato del blocco oscillante (SRM), in regime di grandi spostamenti. In particolare, sono state provate la sensibilità alle variazioni di snellezza, del fattore di scala e dell'accelerogramma applicato al piede. Per entrambi gli oggetti considerati (statua, vaso) si è mostrato come l'aumento della snellezza favorisca l'insorgere dell'instabilità, mentre l'incremento del fattore di scala riduca tale comportamento. I due parametri geometrici, quindi, lavorano in antitesi rispetto alla stabilità dell'oggetto sotto eccitazione sismica.



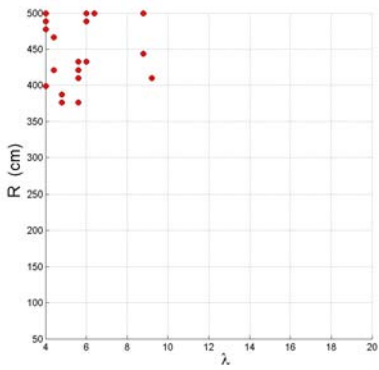
**Figura 68:** Mappa della stabilità per Kobe A1



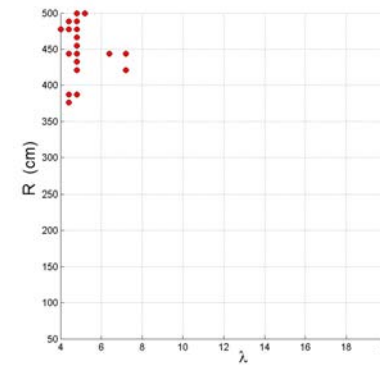
**Figura 69:** Mappa della stabilità per Kobe



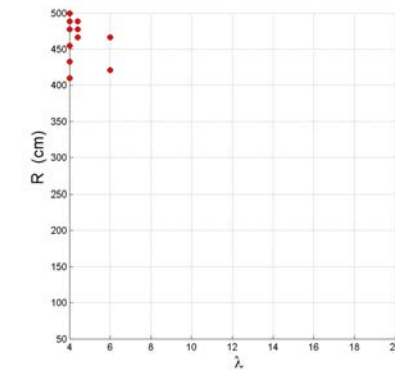
**Figura 70:** Mappa della stabilità per Kobe A2



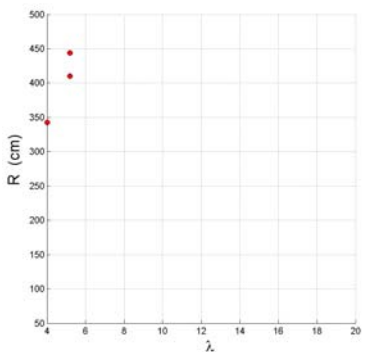
**Figura 71:** Mappa della stabilità per Kobe A3



**Figura 72:** Mappa della stabilità per Kobe A4



**Figura 73:** Mappa della stabilità per Kobe A5



**Figura 74:** Mappa della stabilità per Kobe A6

Con l'analisi multiparametrica si è evidenziato il ruolo dei parametri caratteristici sulla risposta del sistema. Si è visto come, la snellezza abbia un ruolo primario sulla stabilità anche se il fattore di scala influenza positivamente il fenomeno. Per snellezze basse e per fattori di scala elevati si hanno i comportamenti più stabili, mentre per valori di snellezza più grandi e per valori del fattore di scala più piccoli si hanno quelli maggiormente instabili.

Confrontando le risposte per una classe di statue e una classe di vasi, si è notato come la prima risulti meno vulnerabile al medesimo terremoto, fondamentalmente per il maggior fattore di scala esibito.

Analizzando la stessa classe di oggetti d'arte (statue) per il terremoto di El Centro e per quello di Kobe, si è ricavato come per quest'ultimo si presentino comportamenti dinamici nettamente distinti (ad es. stick) e una maggiore vulnerabilità. E' stata esaminata la risposta della classe di statue per terremoti artificiali derivanti dallo stesso Kobe moltiplicato per un'onda sinusoidale allo scopo di modificarne il contenuto in frequenza. Si è osservato come, mantenendo la *PGA* degli accelerogrammi circa costante e aumentando la frequenza della componente sinusoidale il comportamento degli oggetti d'arte tenda sempre più verso la stabilità.

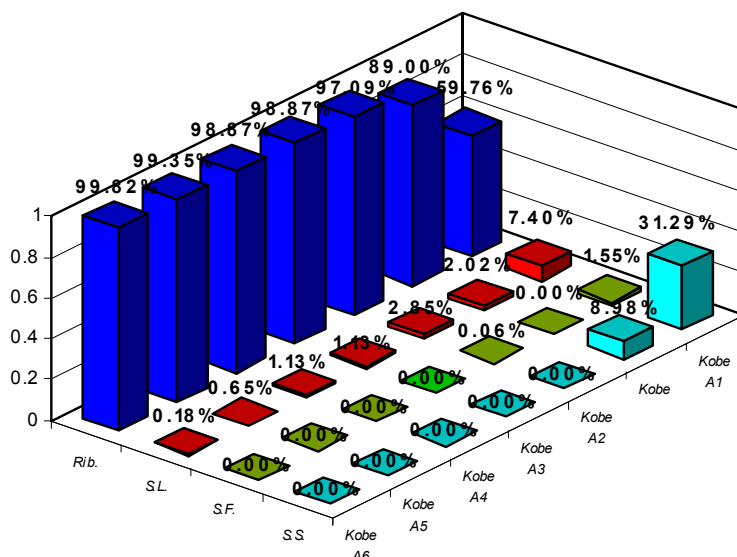


Figura 75: Confronto dei risultati per la classe di statue

Studiando la stessa classe di statue soggetta ad accelerogramma con vari fattori di amplificazione, si è dedotto come l'ampiezza del sisma giochi un ruolo fondamentale sulla stabilità del sistema. Infatti più si incrementa il fattore di amplificazione del record di input più i comportamenti stabili diminuiscono.

Attraverso l'elaborazione delle mappe di *vulnerabilità sismica*, si è voluto creare, una preventiva conoscenza di come tali oggetti reagiscano alle eccitazioni forzate. Queste mappe sono state redatte distinguendo diversi tipi di comportamento dinamico degli oggetti d'arte: pieno contatto durante l'applicazione della forzante (S.S.), oscillazione con rientro in fase di stick (S.F.), oscillazione (S.L.), ribaltamento.

L'oggetto d'arte presenta un comportamento dinamico fortemente sensibile alla natura della forzante sismica, tanto che per avere un'efficiente previsione della sua risposta a tale tipo di eccitazione è fondamentale la conoscenza di accelerogrammi della zona dove sorge il museo o compatibili con le caratteristiche del terreno di fondazione.

Al fine di diminuire la vulnerabilità sismica dei manufatti più stabili è sufficiente verificare che possano assorbire le forze d'inerzia trasmesse dal terremoto, previa adozione di coefficienti di sicurezza riduttivi che ne considerano lo stato di conservazione.

Mentre per gli oggetti più vulnerabili si possono seguire diverse soluzioni, come ad esempio:

- a) Isolamento alla base dei manufatti artistici attraverso opportuni dispositivi.
- b) Abbassamento dell'oggetto in modo da diminuirne la snellezza.
- c) Allargamento della base dell'oggetto in modo da aumentarne il fattore di scala e diminuirne la snellezza.

## Bibliografia

- [1] Housner G.W., "The behaviour of inverted pendulum structures during earthquakes", Bulletin of the Seismological Society of America, 1963; 53: 103-417
- [2] Yang Y.B., Hung H.H., He M.J., "Sliding and rocking response of rigid block due to horizontal excitation", Structural Engineering & Mechanics 2000;9: 1-16
- [3] Shenton H. W. and Jones N.P., "Base excitation of rigid bodies. I: Formulation.", Journal of Engineering Mechanics ASCE 1991; 117(10): 2286-2306
- [4] Shenton H. W. and Jones N.P., "Base excitation of rigid bodies. II: Periodic slide-rock response", Journal of Engineering Mechanics ASCE 1991; 117(10): 2307-2328

- [5] Yim C.S. and Chopra A.K., “Simplified earthquake analysis of structure with foundation uplift”, *Journal of Structural Engineering ASCE* 1985; 111: 906-930
- [6] Calìo I. and Marletta M., “Passive Control of the seismic rocking response of art object”, *Engineering Structures* 2003;25: 1009-1018
- [7] Oliveto G, Calìo I. and Greco A., “Large displacement behaviour of a structural model with foundation uplift under impulsive and earthquake excitations”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. Marzo 2003, v. 32, n. 3, pp. 369-393