

**Dottorato di Ricerca in “Materiali Compositi per l’Ingegneria Civile” – XIII Ciclo**  
**Sede amministrativa: Università degli Studi di Lecce**  
**Dipartimento di Ingegneria dell’Innovazione**

**Tesi di Dottorato**

# **MODELLAZIONE DEL COMPORTAMENTO DEL CILINDRO FASCIATO IN COMPRESSIONE**

**FERRETTI ELENA**

**Coordinatore:**

Chiar.<sup>mo</sup> Prof. Ing. A. La Tegola

**Tutor:**

Chiar.<sup>mo</sup> Prof. Ing. A. Di Leo

**Co-tutor:**

Chiar.<sup>mo</sup> Prof. Ing. E. Viola

Chiar.<sup>mo</sup> Prof. Ing. G. Pascale



## **Parole chiave:**

- Metodo delle Celle
- Modellazione del comportamento meccanico del calcestruzzo
- Meccanica del Continuo Danneggiato
- Meccanica della Frattura con Danno
- Sperimentazione meccanica e computazionale
- Legame costitutivo
- Materiali compositi fibrosi a matrice polimerica



# SOMMARIO

<b>CAP. 1.</b>	<b>INTRODUZIONE .....</b>	<b>1</b>
1.1.	Considerazioni preliminari.....	1
1.2.	Considerazioni sugli approcci di identificazione del legame costitutivo .....	2
<b>CAP. 2.</b>	<b>POSIZIONE DEL PROBLEMA .....</b>	<b>9</b>
2.1.	Comportamento macroscopico del solido compresso.....	9
2.2.	<b>Meccanica del Continuo Danneggiato .....</b>	<b>11</b>
2.2.1.	<i>Evoluzione del danno .....</i>	15
2.2.2.	<i>Determinazione della matrice tangente .....</i>	16
2.2.3.	<i>Il concetto di tensione effettiva .....</i>	17
2.2.4.	<i>Il concetto di deformazione effettiva .....</i>	19
2.2.5.	<i>Alcuni modelli di danno per il conglomerato .....</i>	19
2.3.	Meccanica della Frattura con Danno .....	22
2.4.	Criterio di fessurazione.....	24
2.5.	Definizione del legame costitutivo.....	25
<b>CAP. 3.</b>	<b>PROGRAMMA SPERIMENTALE .....</b>	<b>31</b>
3.1.	<b>Calcestruzzi normali .....</b>	<b>31</b>
3.1.1.	<i>Descrizione .....</i>	31
3.1.2.	<i>Determinazioni sperimentali .....</i>	33
3.1.3.	<i>Risultati sperimentali .....</i>	34
3.2.	<b>Calcestruzzi ad alte prestazioni .....</b>	<b>46</b>
3.2.1.	<i>Descrizione .....</i>	46
3.2.2.	<i>Determinazioni sperimentali .....</i>	49
3.2.3.	<i>Risultati sperimentali .....</i>	50
3.3.	Note .....	79
<b>CAP. 4.</b>	<b>CURVA DI DANNO .....</b>	<b>83</b>
4.1.	Rilievo della superficie di crack dominante.....	83
4.2.	Validazione del meccanismo di crisi ipotizzato .....	85
4.3.	Criterio di identificazione .....	87
4.4.	Risultati sui calcestruzzi normali.....	90
4.5.	Risultati sui calcestruzzi ad alte prestazioni.....	96
<b>CAP. 5.</b>	<b>IDENTIFICAZIONE DEL LEGAME COSTITUTIVO IN MONOASSIALE .....</b>	<b>99</b>
5.1.	Generalità.....	99
5.2.	<b>Identificazione della tensione effettiva .....</b>	<b>100</b>
5.2.1.	<i>Considerazioni operative .....</i>	100
5.2.2.	<i>Risultati sui calcestruzzi normali .....</i>	102
5.2.3.	<i>Risultati sui calcestruzzi ad alte prestazioni .....</i>	112
5.2.4.	<i>Considerazioni sul campo di deformazione .....</i>	114
5.2.5.	<i>Considerazioni sul dominio .....</i>	118

5.3.	Identificazione della deformazione effettiva .....	119
5.3.1.	<i>Considerazioni operative</i> .....	119
5.3.2.	<i>Legge di variazione della pendenza media dei cicli di scarico – ricarica</i> .....	121
5.3.3.	<i>Risultati sui calcestruzzi normali</i> .....	123
5.3.4.	<i>Risultati sui calcestruzzi ad alte prestazioni</i> .....	127
<b>CAP. 6.</b>	<b>IL “METODO DELLE CELLE” .....</b>	<b>129</b>
6.1.	I metodi solutivi tradizionali e il Metodo delle Celle .....	129
6.2.	Equazioni risolventi .....	137
6.2.1.	<i>Interpolazione lineare</i> .....	137
6.2.2.	<i>Interpolazione quadratica</i> .....	143
6.3.	Verifica del metodo: applicazione ad un caso noto .....	149
6.3.1.	<i>Lunghezza minima del concio staticamente equivalente</i> .....	150
6.3.2.	<i>Verifica del modello analitico su dati sperimentali</i> .....	161
6.3.3.	<i>Identificazione dello stress intensity factor di modo I (<math>K_I</math>)</i> .....	162
<b>CAP. 7.</b>	<b>MODELLAZIONE DEL COMPORTAMENTO MACROSCOPICO DI SOLIDI COMPRESSI CILINDRICI IN CALCESTRUZZO .....</b>	<b>165</b>
7.1.	Generalità .....	165
7.2.	Condizioni di vincolo sul contorno .....	165
7.3.	Identificazione delle condizioni di vincolo sul crack alla prima iterazione .....	166
7.3.1.	<i>Fase 1</i> .....	166
7.3.2.	<i>Fase 2</i> .....	167
7.3.3.	<i>Fase 3</i> .....	168
7.4.	Modifica delle fasi 2 e 3 per le iterazioni successive .....	171
7.5.	Routine per l'identificazione della direzione di propagazione del crack .....	172
7.6.	Routine per la visualizzazione grafica dei risultati .....	176
7.7.	Confronti con il risultato sperimentale per ogni geometria .....	180
7.8.	Effetto dimensionale .....	183
<b>CAP. 8.</b>	<b>MATERIALI COMPOSITI FIBROSI A MATRICE POLIMERICA (FRP) .....</b>	<b>185</b>
8.1.	Definizione e caratteristiche .....	185
8.2.	Classificazioni .....	185
8.2.1.	<i>Classificazione basata sulla natura del rinforzo</i> .....	185
8.2.2.	<i>Classificazione basata sull'origine delle fibre</i> .....	186
8.3.	Fasi costituenti .....	187
8.3.1.	<i>Le fibre</i> .....	187
8.3.2.	<i>Le matrici</i> .....	188
8.4.	Proprietà meccaniche .....	190
8.4.1.	<i>Armature in FRP</i> .....	190
8.4.2.	<i>Tessuti in FRP</i> .....	191
8.5.	Legame costitutivo .....	194
<b>CAP. 9.</b>	<b>SOLIDI COMPRESSI CILINDRICI IN CALCESTRUZZO FASCIATI CON TESSUTI IN FRP .....</b>	<b>197</b>
9.1.	Considerazioni introduttive .....	197

---

9.2.	Risultati sperimentali .....	199
9.2.1.	<i>Prove di compressione su cilindri di calcestruzzo</i> .....	200
9.2.2.	<i>Prove di compressione su colonne in c.a.</i> .....	201
9.2.3.	<i>Considerazioni sulla curva volumetrica</i> .....	202
9.3.	Modello di interfaccia solido cilindrico in calcestruzzo/tessuto in FRP .....	204
9.4.	Programma di simulazione analitica .....	207
9.5.	Risultati analitici.....	211
CAP. 10.	CONSIDERAZIONI FINALI.....	217
	INDICE DELLE FIGURE .....	XI
	INDICE DELLE TABELLE .....	XIX





# CAP. 1. INTRODUZIONE

## 1.1. Considerazioni preliminari

Dalla preventiva ricerca bibliografica volta ad accertare il livello attuale di approfondimento in tema di colonne confinate con materiali compositi, è risultato che:

- 1) i modelli numerici utilizzati fino ad oggi considerano le sezioni trasversali delle colonne tutte equivalenti dal punto di vista dello stato di sforzo e di deformazione;
- 2) per il legame costitutivo del calcestruzzo compresso da introdurre nei modelli numerici, sono state proposte due alternative:
  - I. è stato introdotto un legame costitutivo con comportamento di tipo softening desumibile dalle prove di compressione monoassiale su provini cilindrici,
  - II. è stato introdotto un legame costitutivo di tipo parabola/rettangolo, o affini, derivato dalle prove di compressione triassiale su provini cilindrici;
- 3) introducendo l'ipotesi 2)I, il modello numerico che ne deriva è in grado di evidenziare l'aumento di capacità resistente esibito dal provino rinforzato fino al valore di deformazione cui corrisponde il sensibile degrado di rigidità in assenza di rinforzo ma, oltre tale valore di deformazione, contrariamente all'evidenza sperimentale, il modello continua a restituire un ramo di carico a comportamento softening;
- 4) introducendo l'ipotesi 2)II, che si propone di valutare attraverso un modello costitutivo modificato l'effetto di triassialità in cui il provino di calcestruzzo viene a trovarsi per effetto del rinforzo, il modello numerico riesce a cogliere il comportamento indefinitamente monotono esibito dal diagramma tensione/deformazione dei provini rinforzati;
- 5) per il modulo di Poisson del calcestruzzo da introdurre nei modelli numerici, sono state utilizzate funzioni dello stato deformativo longitudinale del provino.

Per quanto riguarda il punto 1), va precisato che l'ipotesi di equivalenza delle sezioni trasversali nei riguardi dello stato di sforzo e di deformazione può essere considerata una buona approssimazione del comportamento effettivo per provini molto tozzi, ma perde di validità all'aumentare della snellezza dei provini stessi.

Per quanto riguarda il punto 3), a parte l'evidente discordanza tra i risultati ottenibili col modello proposto ed i dati sperimentali, rimane comunque da chiedersi se sia possibile attribuire significato fisico ad un ramo del legame costitutivo di tipo softening. Infatti, mentre un rapporto negativo fra variazione di carico e variazione di spostamento, valore riferito alla struttura, può essere interpretato come sopraggiungere di una fase di instabilità strutturale, non è possibile attribuire un analogo significato fisico al rapporto negativo fra variazione di tensione e variazione di deformazione, valore riferito all'intorno infinitesimo, dal momento che per l'intorno infinitesimo non è fisicamente definibile lo stato di instabilità.

Per quanto riguarda, invece, il punto 4), è vero che il corrispondente modello numerico approssima discretamente l'evidenza sperimentale, ma non si capisce la necessità di dover definire un legame costitutivo dipendente dal tipo di prova di carico quando il legame costitutivo, per sua stessa definizione, corrisponde ad una proprietà intrinseca del materiale. D'altra parte, è noto che il legame costitutivo, così come viene attualmente identificato a partire dai dati sperimentali, risulta dipendere almeno da altri due fattori: le dimensioni e la geometria del solido di prova.

Infine, per quello che riguarda il punto 5), anche in questo caso non si capisce la necessità di dover definire un modulo di Poisson variabile con lo stato deformativo longitudinale quando, invece, anche tale modulo corrisponde ad una proprietà intrinseca del materiale.

## 1.2. Considerazioni sugli approcci di identificazione del legame costitutivo

Per quanto detto a proposito della discussione dei punti 3) e 4), in questo lavoro di Tesi di Dottorato viene confutata la proposta di legame costitutivo del calcestruzzo finora avanzata, in quanto palesemente non rappresentativa di una proprietà costitutiva dell'intorno infinitesimo di materiale. Ovvero, è lecito ritenere che le modalità finora adottate per identificare il legame costitutivo, a partire dai diagrammi carico/spostamento per carico monoassiale di compressione, sia viziato da una non sufficientemente ravvicinata lettura del fenomeno fisico.

Si pone quindi la necessità di definire un procedimento identificativo del legame costitutivo in compressione monoassiale più aderente alla realtà fisica. A tal fine, occorre fare un passo indietro e tornare al momento dell'esecuzione delle prove monoassiali di carico per riesaminare la correttezza dell'intero procedimento di elaborazione dei dati sperimentali.

Infatti, bisogna ricordare che, sebbene uno degli scopi principali delle prove meccaniche di laboratorio sia l'identificazione delle proprietà costitutive del materiale in studio, l'oggetto della prova meccanica non è mai il materiale, come sarebbe auspicabile, ma è un provino, ovvero, un solido che, per quanto limitate possano essere le sue dimensioni, è sempre riconducibile ad una struttura. L'esito della prova meccanica, allora, non è determinato univocamente dalle caratteristiche costitutive del materiale, ma dipende dalla cinematica del provino in quanto struttura.

Poiché poi la macchina di prova costituisce un vincolo alla cinematica del provino, l'esito della prova è condizionato sia dall'interazione tra provino e macchina di prova, sia dalle caratteristiche metrologiche della macchina di prova stessa.

In sintesi, quale che sia la prova di laboratorio effettuata, è sempre possibile esprimere il risultato sperimentale  $R$  attraverso i vari fattori che lo determinano (Figura 1.2.1).

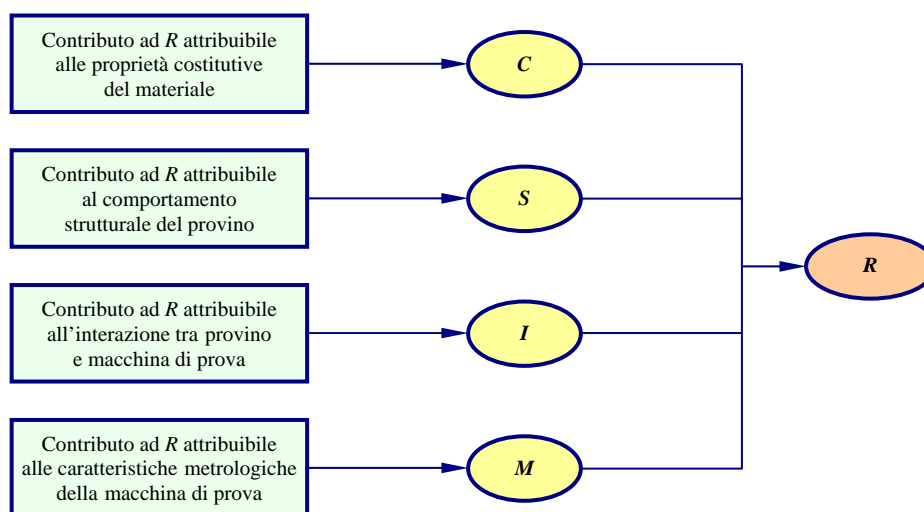


Figura 1.2.1. Elenco dei fattori che determinano il risultato sperimentale  $R$ .

Attribuendo a  $C$ ,  $S$ ,  $I$  e  $M$  la quota parte che compete loro nella formazione di  $R$ :

$$C = K_C R,$$

$$S = K_S R,$$

$$I = K_I R,$$

$$M = K_M R,$$

con:

$$K_C + K_S + K_I + K_M = 1,$$

è dunque possibile esprimere il risultato sperimentale  $R$  attraverso la semplice relazione:

$$R = C + S + I + M .$$

Quest'ultima relazione, seppur estremamente intuitiva, è comunemente ignorata agli effetti degli sviluppi successivi. Infatti, il risultato sperimentale viene solitamente attribuito in toto alle sole proprietà costitutive del materiale, trascurando cinematica strutturale, interazione con la macchina di prova ed influenza dovuta alle proprietà metrologiche della macchina di prova. Ciò equivale, di fatto, ad assumere:

$$K_C = 1,$$

$$K_S = K_I = K_M = 0$$

ed a derivare le proprietà costitutive del materiale direttamente dal risultato sperimentale, con le opportune trasformazioni di scala:

$$C \equiv R .$$

Volendo invece derivare le proprietà costitutive del materiale, a partire sì dal risultato sperimentale  $R$ , ma senza trascurare il peso che le quote  $S$ ,  $I$  e  $M$  hanno su quest'ultimo, si può stimare mediante un unico fattore  $K$  il contributo complessivo di  $S$ ,  $I$  e  $M$ :

$$K = K_S + K_I + K_M$$

e valutare la quota parte  $C$  del risultato sperimentale  $R$ , conseguente alle sole caratteristiche costitutive del materiale, come:

$$C = (1 - K)R ,$$

ovvero, indicando con  $c$  la proprietà costitutiva cercata ed inglobando nel parametro  $k$ , oltre al contributo di  $S$ ,  $I$  e  $M$ , anche le trasformazioni di scala:

$$c = (1 - k)R .$$

Il problema dell'identificazione della proprietà costitutiva  $c$  cercata, si trasforma allora nel problema dell'identificazione dell'incognita  $k$ .

Questo approccio, formalmente più corretto del precedente, presenta però l'inconveniente di non essere di immediata applicazione. Ciò accade perché l'incognita  $k$ , già di non ovvia identificazione per i primi passi della prova meccanica, è ben lontana dall'essere una costante del nostro problema e varia secondo una legge non nota a priori.

Infatti, mentre le caratteristiche del calcestruzzo sono costitutive e, quindi, dipendenti solo dal materiale e non dal generico passo della prova di carico, le caratteristiche meccaniche del provino variano durante la prova di carico per l'enucleazione di volumi danneggiati e la propagazione di fratture: in particolare, la rigidità del provino decresce all'aumentare del quadro fessurativo e lo stesso schema strutturale si modifica progressivamente. Ne risulta variato, allora, anche il contributo del comportamento strutturale del provino alla formazione del risultato sperimentale  $R$ . In altre parole, il "peso"  $K_S$  che la meccanica strutturale esercita su  $R$  non è costante, ma varia al procedere della prova meccanica:

$$K_S = K_S(R).$$

Oltre a ciò, è lecito aspettarsi che, nelle prime fasi della prova meccanica, la macchina di prova influisca in maniera sensibile sul risultato sperimentale, sia in termini di interazione col provino, sia in termini di alterazione del risultato per limiti meccanici intrinseci. In questa fase, infatti, si realizza l'accoppiamento macchina/provino e, a fronte anche dei modestissimi carichi esterni, le eventuali imperfezioni, tanto del provino, quanto dell'apparato sperimentale, sono quanto mai determinanti sui valori rilevati.

È però altrettanto lecito aspettarsi che, aumentando la sollecitazione esterna, i problemi di accoppiamento acquistino un peso sempre minore e che entrambi i fattori  $K_I$  e  $K_M$  vadano annullandosi.

Infine, nelle fasi terminali della prova meccanica, essendo la struttura resistente del provino ormai fatiscente, il contributo del fattore  $K_I$  potrebbe essere ancora inessenziale, ma il contributo del fattore  $K_M$  potrebbe diventare nuovamente tutt'altro che trascurabile.

Interpretando allora anche  $K_I$  e  $K_M$  come "pesi" esercitati su  $R$ , rispettivamente, dall'interazione provino/macchina di prova e dalle caratteristiche metrologiche della macchina di prova, ne segue che anche questi pesi variano al procedere della prova meccanica:

$$K_I = K_I(R),$$

$$K_M = K_M(R).$$

Dovendo poi la somma di tutti i pesi essere uguale a 1, la dipendenza dalla storia di carico di  $K_S$ ,  $K_I$  e  $K_M$  porta con sé la dipendenza dalla storia di carico anche di  $K_C$ :

$$K_C = K_C(R)$$

e, in ultima analisi:

$$k = k(R).$$

Fatto 1 il risultato sperimentale  $R$ , in Figura 1.2.2 vengono mostrate tre plausibili schematizzazioni della ripartizione di  $R$ , all'inizio (1.2.2.a'), in fase intermedia (1.2.2.b) e alla fine (1.2.2.c) della prova meccanica.

Per quanto riguarda la fase iniziale, va ricordato che, per limitare l'influenza sul dato sperimentale dell'interazione provino/macchina di prova e delle proprietà metrologiche della macchina di prova, è consuetudine sottoporre il provino ad un ciclo di stabilizzazione (Figura 1.2.2). Tale ciclo consiste nel conferire al provino un piccolo precarico, per poi tornare ad un carico base pari a circa il 10% del carico massimo presunto e riprendere nuovamente ad incrementare il carico.

La prova meccanica vera e propria inizia solo quando si riprende ad incrementare il carico a partire dal valore base. Durante il ciclo di stabilizzazione, l'accoppiamento provino/macchina viene realizzato in maniera pressoché completa. Questa operazione è di importanza fondamentale perché, all'inizio della prova meccanica vera e propria, risulta sensibilmente ridotta l'influenza sul dato sperimentale delle imperfezioni, tanto del provino, quanto dell'apparato sperimentale. Quando si effettui il ciclo di stabilizzazione, la ripartizione di  $R$  all'inizio della prova di meccanica è rappresentata dalla Figura 1.2.2.a".

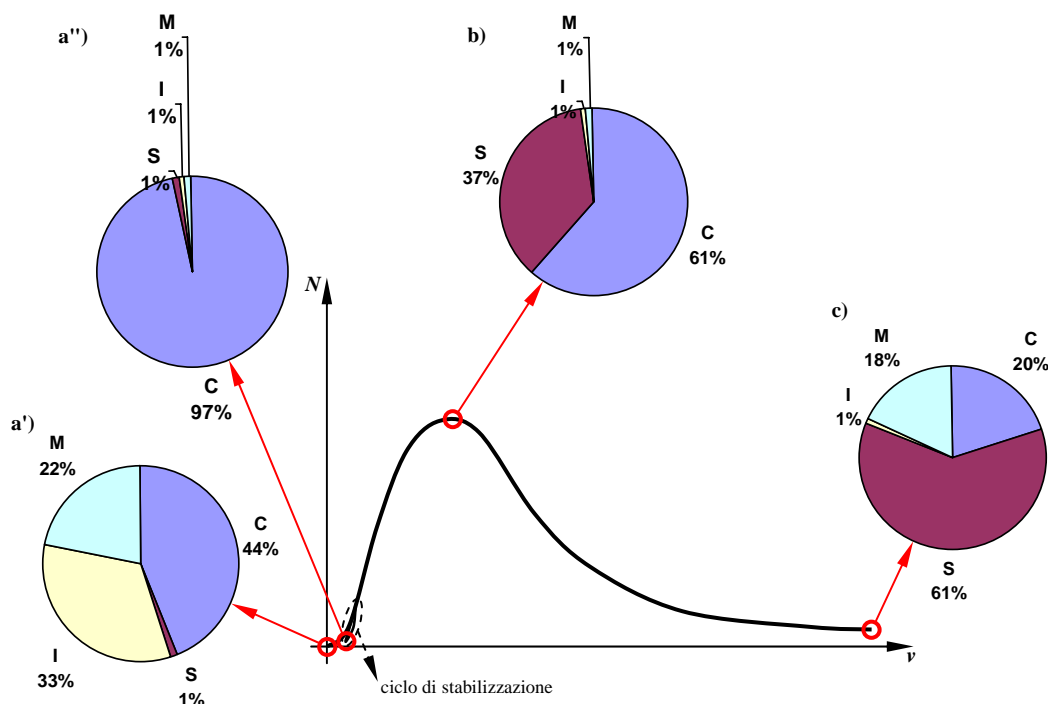


Figura 1.2.2. Plausibili schematizzazioni della ripartizione di  $R$  all'inizio senza ciclo di stabilizzazione (a'), all'inizio con ciclo di stabilizzazione (a''), in fase intermedia (b) e alla fine (c) della prova meccanica.

L'assunzione  $C \equiv R$ , allora, può essere ritenuta accettabile solo nelle primissime fasi di una prova meccanica nella quale si sia effettuato un ciclo di stabilizzazione.

In conclusione, non è possibile mettere in relazione diretta le caratteristiche costitutive del materiale con il risultato sperimentale per mezzo di un semplice fattore di scala, ma occorre saper valutare la dipendenza dal generico passo di carico di tutte le quote che formano il risultato sperimentale.

Da questa conclusione, segue immediatamente un risultato di importanza fondamentale, sul quale è imperniata tutta la presente Tesi di Dottorato: è possibile assumere che il legame costitutivo in compressione monoassiale del calcestruzzo sia descritto da una legge che ben poco ha a che vedere con le curve tensione media/deformazione media ( $\bar{\sigma}/\bar{\varepsilon}$ ), alle quali viene tradizionalmente attribuito valore costitutivo.

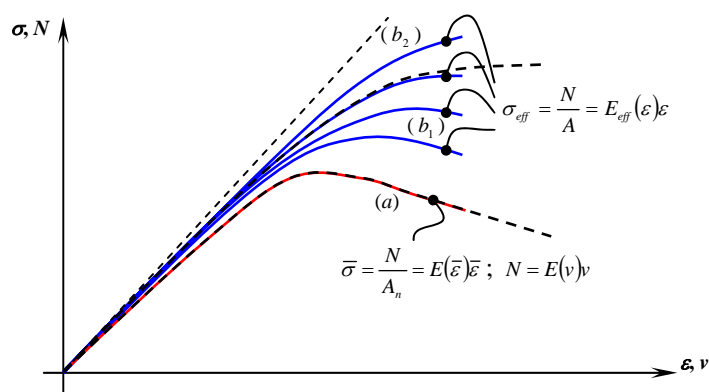
Detto questo, è possibile stimare a priori quale debba essere l'andamento qualitativo del legame costitutivo in compressione monoassiale del calcestruzzo?

Una prima indicazione a tal proposito può essere derivata proprio dalle considerazioni sviluppate nel § 1.1 sulla possibilità dell'esistenza di un ramo a comportamento softening nei legami costitutivi. Inoltre, poiché i programmi di simulazione numerica nei quali si introducono legami costitutivi a comportamento softening, pur correttamente impostati nel rispetto delle condizioni di equilibrio e di congruenza, non riescono a fornire rami di carico a comportamento indefinitamente monotono per il calcestruzzo confinato, si può ritenere che un legame costitutivo correttamente ricavato dalle prove sperimentali in regime monoassiale di compressione, pur derivando da diagrammi di carico/spostamento di tipo softening, debba esibire comportamento monotono crescente.

Se così fosse, nel calcestruzzo in compressione monoassiale si verificherebbe qualcosa di analogo a quanto avviene nell'acciaio in trazione monoassiale per effetto del fenomeno della strizione. È noto, infatti, che la comparsa di un ramo softening nel legame costitutivo identificato per l'acciaio deriva unicamente dall'errore commesso quando, al subentrare del fenomeno della strizione, non si tiene conto del decremento di area resistente del provino che ne consegue. Al contrario, valutando correttamente l'area resistente in fase di strizione, si identifica un legame costitutivo monotono crescente.

Ovviamente, per la diversità tra i materiali e le prove di carico, l'analogia non è da ricercarsi tanto nei meccanismi di crisi quanto nel fatto che, nonostante l'effetto Poisson, il danneggiamento subito dal calcestruzzo sotto carico è di entità tale da comportare una riduzione progressiva di sezione resistente: per questo motivo, anche nel caso del calcestruzzo, come già per l'acciaio, non è lecito confondere area resistente e area nominale. Sotto questa ipotesi, non è corretto ricavare la tensione media sulla generica sezione trasversale del provino come rapporto tra carico esterno e area nominale, ma occorre sostituire a quest'ultima il valore corrente dell'area resistente.

Assumendo per quest'ultima arbitrarie leggi di decremento, il legame costitutivo qualitativo risulta allora rappresentato da una delle curve della famiglia  $(b)$  in Figura 1.2.3, mentre la curva  $(a)$  resta rappresentativa solo del comportamento strutturale  $(N/v)$ .



**Figura 1.2.3.** Leggi costitutive ipotetiche  $(\sigma_{eff}/\bar{\epsilon})$  al variare della legge di decremento dell'area resistente  $(A_{res})$  e loro confronto con la curva della tensione media  $(\bar{\sigma}/\bar{\epsilon})$  e con il diagramma carico/spostamento  $(N/v)$ .

In particolare, la sottofamiglia  $(b_1)$  raccoglie tutte le curve a comportamento softening, mentre la sottofamiglia  $(b_2)$  raccoglie tutte le curve monotone.

Per quanto detto in precedenza, è lecito aspettarsi che l'effettiva legge di decremento dell'area resistente sia tale da restituire legami costitutivi rappresentati da una delle curve  $(b_2)$ , escludendo tutti i possibili andamenti a comportamento softening.

In conclusione, le non linearità nel diagramma carico/spostamento, compreso il ramo decrescente, potrebbero essere una diretta conseguenza della riduzione di sezione resistente e, in tal senso, sarebbero caratteristiche della risposta su scala macroscopica della struttura, mentre non corrisponderebbero ad una proprietà del materiale su scala microscopica. In modo del tutto analogo si spiegherebbe anche la dipendenza del diagramma carico/spostamento dalle dimensioni e dalla geometria del solido di prova.

Alla luce di queste considerazioni, occorre riesaminare il meccanismo di crisi del calcestruzzo in compressione individuando le cause e l'entità del degrado dell'area resistente del solido di prova, in modo da poter identificare una legge costitutiva effettivamente rappresentativa delle caratteristiche del materiale e non più legata alla meccanica strutturale.

Bisogna notare, a questo punto, che in questa stessa direzione si muove la teoria della Meccanica della Frattura con Danno. Però, mentre quest'ultima tenta di definire tramite una variabile di danno fissata a priori l'entità del degrado della sezione resistente, lo scopo di questa tesi di Dottorato è la messa a punto di un programma di simulazione numerica che, partendo dalle relazioni costitutive dell'intorno materiale e in base a sole considerazioni sul dominio di crisi, sia in grado di risalire ai diagrammi carico/spostamento dei singoli provini cilindrici (fasciati e non) e di valutare, a posteriori, tanto la variazione di sezione resistente quanto l'evoluzione della variabile di danno. Interpretando anche la variabile di danno come una risposta su scala macroscopica della struttura e, come tale, dipendente dalle dimensioni e dalla geometria del solido di prova, si riesce a spiegare la grande varietà e diversità di formulazioni per tale variabile (scalari, vettoriali o tensoriali) avanzate dagli Autori che si sono occupati di Meccanica del Danno (Bazant, Belytschko, Cervenka, Chaboche, Fonseka, Hughes, Ju, Kachanov, Krajcinovic, Lemaitre, Loland, Lorrain, Lubliner, Martin, Mazars, Oh, Pijaudier-Cabot, Resende, Simo).





## CAP. 2. POSIZIONE DEL PROBLEMA

### 2.1. Comportamento macroscopico del solido compresso

Se si impone alle due parti nelle quali il provino cilindrico si divide in seguito alla prova di carico (una parte centrale a forma di “rocchetto” e un involucro esterno, Figura 2.5.1) di soddisfare le condizioni di equilibrio all’interfaccia (azioni scambiate tra le due porzioni di materiale a livello dei “denti” che si formano sulle superfici di crisi per effetto della presenza degli inerti) e di congruenza (stesso abbassamento verticale della sezione superiore) si ottiene che:

- ✓ la deformazione longitudinale, in accordo con quanto affermato a proposito della discussione del punto **1**) del § 1.1, non assume valore costante sull’altezza del provino;
- ✓ per la parte centrale a forma di “rocchetto” la deformazione longitudinale cresce procedendo dai piatti della pressa verso la zona centrale;
- ✓ per l’involucro esterno la deformazione longitudinale decresce procedendo dai piatti della pressa verso la zona centrale.

Dal momento che, per la diversa deformabilità delle due parti, l’abbassamento a parità di quota delle due porzioni assume lo stesso valore solo in corrispondenza dei piatti della pressa e della sezione trasversale di simmetria, se ne deduce che la superficie di crisi è anche superficie di scorrimento relativo. Poiché poi, per quanto visto, la superficie di crisi è scabra, parallelamente allo scorrimento relativo tra le due porzioni di materiale si avrà, per effetto “ingranamento”, anche un fenomeno di apertura della lesione principale (dilatanza).

Tale fenomeno di apertura, si sovrappone allo spostamento in direzione radiale dovuto, per effetto Poisson, alla deformazione radiale propriamente detta, e, quindi:

- ✓ non è corretto determinare la deformazione radiale per semplice rapporto tra i valori sperimentali dello spostamento radiale complessivo ed il raggio del provino;
- ✓ non è corretto determinare l’andamento del modulo di Poisson come rapporto (cambiato di segno) tra i valori sperimentali della deformazione radiale (valutata come al punto precedente) e della deformazione longitudinale (mediata, tra l’altro, sull’intera altezza del provino).

Inoltre, interpretando lo spostamento in direzione radiale come somma di una aliquota dovuta all’effetto Poisson e di un’aliquota dovuta all’apertura delle fessure e assegnando tutta la variabilità dallo stato deformativo longitudinale a quest’ultima, viene a mancare l’incongruenza messa in evidenza a proposito della discussione del punto **5**) del § 1.1.

In ultima analisi, se ne deduce che è possibile continuare a ritenere il modulo di Poisson una proprietà intrinseca del materiale, e, come tale, costante al variare dello stato deformativo del provino. Inoltre, l’ulteriore spostamento in direzione radiale, rispetto a quello dovuto all’effetto Poisson, risulta funzione, oltre che dello stato deformativo longitudinale, anche del grado di scabrezza delle superfici di scorrimento, o, per meglio dire, delle dimensioni medie degli inerti, almeno fino a quando non si ha la rottura a taglio dei “denti” responsabili dell’“ingranamento”.

Ai fini di una più accurata interpretazione del meccanismo di crisi del calcestruzzo, è da notare, infine, che il manifestarsi di un effetto “ingranamento” sulle superfici di scorrimento comporta che, in seguito all’attivarsi di tali superfici, gli intorni infinitesimi di materiale ad esse adiacenti e situati oltre la distanza di estinzione si vengano a trovare in uno stato di tensione triassiale, anche se la prova di carico è monoassiale. Come appare evidente dall’analisi dello stato tensionale sul piano di Mohr, tale ultima evenienza implica che i cerchi di Mohr relativi a tali intorni (tangenti all’origine fino all’attivarsi delle superfici di scorrimento), una volta raggiunta la superficie limite, non necessariamente comportano il manifestarsi della crisi ma, poiché con il subentrare dello stato di triassialità viene a cadere il vincolo di tangenza all’origine, hanno ancora la possibilità di accrescersi (e quindi di sopportare ulteriori incrementi di carico esterno) rimanendo tangenti alla superficie

limite. Questa fase di accrescimento dei cerchi di Mohr in tangenza alla superficie limite è proprio la fase nella quale si manifesta il fenomeno di “ingranamento” per scorrimento relativo sulle superfici di crisi.

In definitiva, la superficie di crisi non si attiva tutta nello stesso istante, ma il suo attivarsi dipende, punto per punto, dalla tensione radiale massima che può essere trasmessa, per “ingranamento”, al rispettivo intorno infinitesimo e, quindi, dipende dalle condizioni di equilibrio sulla sezione trasversale passante per il punto in esame. Di conseguenza, al variare del rapporto diametro/altezza del provino, la superficie di scorrimento si può originare tanto nella zona centrale del provino per procedere verso le zone direttamente caricate, quanto nelle zone adiacenti ai piatti della pressa per procedere verso la zona centrale del provino.

In base a queste considerazioni è, evidente come, in accordo con quanto affermato a proposito della discussione del punto 1) del § 1.1, lo stato tensionale non possa essere costante sull'altezza del provino.

In base all'analisi della forma della superficie di crisi nel piano di Mohr e della massima tensione radiale trasferibile per “ingranamento”, si può osservare che i cerchi di Mohr relativi agli intorni infinitesimi raggiungono punti di crisi diversi in funzione della posizione dell'intorno e, quindi, la pendenza della superficie di scorrimento che si attiva nel provino dipende dalla distanza dai piatti della pressa dell'intorno considerato. Si spiega, così, l'effettivo meccanismo di crisi dei provini cilindrici soggetti alle prove di carico: in essi, infatti, le superfici di scorrimento isolano, come già ricordato, una parte centrale a forma di “rocchetto”, evidente conseguenza di una non costanza della pendenza delle superfici di scorrimento stesse.

Si può notare, inoltre, che una più precisa individuazione della natura e dell'entità delle aliquote che vanno a formare i valori sperimentali dello spostamento radiale non è importante solo per la comprensione del meccanismo di crisi del calcestruzzo non confinato, ma permette anche di valutare con maggior precisione la risposta al processo di carico del calcestruzzo confinato. Infatti, l'effetto di confinamento offerto dal rinforzo viene mobilitato dal valore complessivo dello spostamento radiale ma agisce singolarmente sulle sue diverse aliquote comportando effetti diversi sulla rigidità globale e sullo stato di sforzo interno del provino:

- ✓ Il confinamento esterno agisce sulla quota dello spostamento radiale dovuta all'apertura delle fessure ostacolando tale apertura e, quindi, limitando lo scorrimento tra le superfici del crack principale. A livello dei “denti” della superficie scabra del crack principale, tale azione esterna corrisponde ad un apparente aumento del coefficiente di attrito interno del calcestruzzo o, equivalentemente, ad un cono di attrito di ampiezza maggiore: poiché il coefficiente di attrito corrisponde, nel piano di Mohr, alla tangente alla superficie limite, ne segue che, in presenza di confinamento, tale superficie sarà più ampia della corrispondente superficie relativa al calcestruzzo non confinato e, quindi, l'attivazione del piano di scorrimento si avrà per valori maggiori di tensione normale. È allora possibile mettere in relazione le condizioni di propagazione della superficie di crisi con la percentuale di rinforzo esterno. Un'altra conseguenza dell'apparente maggior coefficiente di attrito è che, a parità di scorrimento relativo, ogni “dente” risulta sollecitato da una forza la cui componente verticale è maggiore rispetto al caso di assenza di rinforzo.
- ✓ Il confinamento esterno agisce sulla quota dello spostamento radiale dovuta all'effetto Poisson trasferendo al provino un campo di tensioni radiali e riducendo la deformazione radiale. Poiché, per effetto Poisson e per il vincolo allo spostamento assiale imposto dal piatto superiore della pressa, il contenimento delle deformazioni radiali si riflette, a parità di spostamento verticale del piatto superiore, in un incremento di sforzo assiale di compressione rispetto al caso di provino non confinato, si può affermare che, anche in questo secondo caso, il confinamento comporta un effetto sul campo tensionale sia in direzione radiale, sia in direzione assiale. Però, mentre nel caso precedente l'incremento di tensione assiale si verifica in corrispondenza delle superfici di scorrimento per effetto di una interfaccia dalle apparenti migliori caratteristiche meccaniche, in

questo caso l'incremento di tensione assiale è un fenomeno che interessa contemporaneamente tutti gli intorni infinitesimi di materiale.

Sempre a proposito del calcestruzzo confinato, si può osservare che, nel piano di Mohr, per la presenza di uno stato di triassialità crescente col progredire del processo di carico, lo "stress path" viene individuato, fino al raggiungimento della superficie limite, da una retta a minore pendenza rispetto all'analogia retta del calcestruzzo non confinato. Inoltre, una volta raggiunta la superficie limite, la tensione radiale trasmessa dal rinforzo, essendo crescente col carico esterno, permette ai cerchi di Mohr di muoversi in tangenza alla superficie limite per un tratto maggiore rispetto al caso di assenza di rinforzo.

L'ultima considerazione che si intende fare deriva dall'osservazione dei diagrammi carico/spostamento dei cilindri confinati con materiali compositi: da questi diagrammi, che possono in prima approssimazione essere considerati delle bilatere, appare evidente che, all'aumentare della percentuale di rinforzo, il primo ramo non manifesta sostanziali variazioni di pendenza, mentre il secondo assume pendenze via via maggiori. Se si ipotizza che il primo ramo di carico corrisponda alla fase in cui è ancora lecito confondere la sezione resistente con la sezione nominale e che il secondo ramo di carico corrisponda alla fase di propagazione della frattura con conseguente degrado della sezione resistente, questo risultato sperimentale assume un preciso significato fisico. L'aumento di percentuale di rinforzo esterno, infatti, ostacolando l'apertura delle lesioni interne, ostacola anche il degrado della sezione resistente riducendo così la differenza tra il comportamento macroscopico del provino ed il comportamento microscopico del calcestruzzo: ne segue che la differenza fra l'andamento dei diagrammi carico/spostamento e tensione effettiva/deformazione effettiva decresce all'aumentare della percentuale di rinforzo esterno e che, al limite, un ipotetico diagramma carico/spostamento ricavato per spessore infinito del rinforzo ha lo stesso andamento del legame costitutivo del calcestruzzo.

Ovviamente, perché questo ragionamento sia valido, è necessario che il rinforzo esterno non sia in grado di sopportare carichi assiali e, quindi, una forma plausibile del legame costitutivo del calcestruzzo può ricavarsi, per esempio, dall'osservazione di provini cilindrici fasciati con un'altissima percentuale di fogli in materiale composito, mentre non sono utilizzabili allo scopo prove sperimentali su tubi in composito riempiti di calcestruzzo.

## 2.2. Meccanica del Continuo Danneggiato

Caratteristica saliente della meccanica del Continuo Danneggiato sono alcune quantità scalari, vettoriali o tensoriali, definite come variabili di danno, alle quali vengono relazionate la perdita di capacità portante, l'aumento di deformabilità ed in genere tutte le trasformazioni irreversibili del materiale. Tramite una legge di evoluzione, le variabili di danno vengono successivamente relazionate alle grandezze macroscopiche esterne.

L'estensione della Meccanica del Continuo Danneggiato ai materiali fragili, ed in particolare al conglomerato, è avvenuta in quest'ultimo decennio per merito di Kachanov [1980], Loland [1980], Krajcinovic e Fonseka [1981], Krajcinovic [1983], Lorrain e Loland [1983] Simo e Ju [1987], Ju e al. [1989], Mazars e Pijaudier-Cabot [1987].

La Meccanica del Continuo Danneggiato si inquadra, da un punto di vista teorico, nella Termodinamica con variabili interne [Coleman e Gurtin, 1967], estensione ai processi irreversibili della Termodinamica classica. Questa ultima tratta delle differenti forme di energia presenti in un sistema termomeccanico e di come queste possano trasformarsi fra loro. Poiché la teoria è sufficientemente consolidata, [Coleman e Gurtin, 1967; Pister, 1972; Nemat Nasser, 1975; Billington e Tate, 1981], si riportano esclusivamente gli aspetti essenziali.

La rappresentazione degli stati di equilibrio di un sistema termomeccanico necessita la conoscenza delle seguenti grandezze:  $u$  = vettore spostamento,  $\sigma$  = tensore delle tensioni,  $b$  = vettore delle forze di volume,  $e$  = energia interna specifica,  $\eta$  = entropia interna specifica,  $q$  = vettore flusso

di calore,  $r$  = calore specifico prodotto nell'unità di tempo,  $T$  = temperatura assoluta. Tali grandezze devono soddisfare alle equazioni di equilibrio, di conservazione della massa e ai due principi della Termodinamica.

Il primo principio è una legge di conservazione energetica in cui si introduce un'energia termica quando la differenza fra energia potenziale e cinetica non si mantiene costante:

$$dU + dE_{cin} = dQ + dL$$

con  $U$  = energia interna,  $E_{cin}$  = energia cinetica del sistema,  $L$  = lavoro delle forze esterne compiuto sul sistema e  $dQ$  = quantità di calore assorbita dall'esterno. Per confronto con l'espressione del lavoro meccanico delle tensioni interne:

$$dL_i = dL - dE_{cin} = \int \sigma d\epsilon dV,$$

si ottiene la relazione di bilancio energetico termico:

$$dU = dQ + dL_i.$$

La precedente relazione, valida per un generico elemento di volume e per qualsiasi intervallo di tempo  $dt$ , può scriversi:

$$\rho \dot{e} = \rho r - \text{div}(q) + \sigma \dot{\epsilon}.$$

Il secondo principio della Termodinamica stabilisce, invece, come possano trasformarsi le diverse forme energetiche presenti nel primo principio. A partire, infatti, da un certo stato di equilibrio non possono essere raggiunti altri stati di equilibrio con uguale, o minore, energia interna, attraverso una trasformazione adiabatica ed isometrica.

Per individuare il verso delle trasformazioni viene, allora, introdotta una grandezza di stato, entropia  $S$ , definita nella Termomeccanica classica solo per stati di equilibrio:

$$\frac{dQ}{T} \leq dS.$$

L'entropia è una grandezza non decrescente che non può essere misurata, ma solo calcolata, nel caso di trasformazioni reversibili. In questo caso nella relazione precedente vale il segno di uguaglianza. Indicata con  $\eta$  l'entropia per unità di massa si ottiene:

$$\rho \dot{\eta} - \frac{\rho r}{T} + \text{div}\left(\frac{q}{T}\right) \geq 0,$$

$$\rho T \dot{\eta} - \rho \dot{e} + \sigma \dot{\epsilon} - q \frac{\text{grad}(T)}{T} \geq 0.$$

È conveniente introdurre la variabile di stato energia libera di Helmholtz:

$$H = U - TS,$$

per sostituire nelle relazioni precedenti l'energia interna  $U$ . sia  $\psi$  la stessa grandezza per unità di massa:

$$\psi = e - T\eta ,$$

che, introdotta nella precedente e per un processo isoterma, conduce alla seguente espressione (disequazione di Clausius):

$$\rho \dot{\psi} \leq \sigma \dot{\varepsilon} - q \frac{\text{grad}(T)}{T} .$$

Nel caso di trasformazioni irreversibili, la grandezza entropia non è più definita univocamente, in quanto non vale il segno di uguaglianza per alcuna delle relazioni riportate. Di conseguenza non è più possibile rappresentare nello spazio delle variabili di stato l'evolversi dei processi irreversibili del sistema. Tutto ciò è in accordo col fatto che la temperatura di un corpo può essere valutata solo se lo stesso ha raggiunto uno stato di equilibrio termico, in quanto misurabile sulla superficie ed in seguito attribuita a tutto il volume del corpo.

Nella Termodinamica dei processi irreversibili [Coleman e Gurtin, 1967; Nemat Nasser, 1975] è necessario, allora, postulare l'esistenza di una temperatura assoluta misurabile anche in condizioni di non equilibrio. Bisogna inoltre specificare la produzione di entropia interna  $S_{\text{int}}$ , legata alle modalità dissipative del materiale.:

$$TdS = dQ + TdS_{\text{int}} ,$$

$$TdS_{\text{int}} = d \int_V \rho \gamma dV .$$

In questa relazione  $\gamma$  rappresenta l'entropia prodotta per unità di massa qualora non vi sia scambio di calore con l'esterno. La disequazione di Clausius si riscrive allora:

$$\rho \dot{\psi} \leq \sigma \dot{\varepsilon} - q \frac{\text{grad}(T)}{T} - \rho \dot{\gamma} .$$

Si supponga ora che i fenomeni dissipativi del materiale possano essere identificati da un set di variabili di stato, denotate con  $\xi$  e dette interne perché inaccessibili all'osservazione diretta. Per definizione, durante una qualsiasi trasformazione reversibile, le variabili interne mantengono valore costante. Disaccoppiando il problema meccanico da quello termico [Coleman e Gurtin, 1967; Pister, 1972; Nemat Nasser, 1975], in un processo isoterma, l'energia libera di Helmholtz per unità di massa è funzione delle solo coordinate di deformazione e delle variabili interne:

$$\psi = \psi(\varepsilon, \xi) .$$

Di conseguenza:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} d\xi = \frac{1}{\rho} \sigma d\varepsilon - d\gamma .$$

Dal confronto tra la precedente con la disequazione di Clausius si ricava:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon},$$

$$\gamma = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \dot{\xi} \geq 0.$$

Per poter definire completamente la risposta del sistema meccanico è necessario definire la legge di evoluzione delle variabili interne  $\xi$ , in funzione del valore attuale delle stesse e delle coordinate di deformazione, o specificando maggiormente le modalità dissipative del materiale.

Ad esempio, in forma del tutto generale, è possibile porre:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = Q(\varepsilon, \xi, \dot{\xi}),$$

da cui:

$$\gamma = Q \dot{\xi}.$$

La risposta del sistema è quindi ricondotta alla soluzione del sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \sigma = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi(\varepsilon, \xi)}{\partial \varepsilon} \\ Q \dot{\xi} = \gamma \end{cases}$$

Nella scelta delle variabili interne  $\xi$ , e della loro evoluzione temporale, è necessario rispettare che le stesse siano effettivamente variabili di stato e che non venga violato il secondo principio della Termodinamica. Come ulteriore requisito si può richiedere che siano in numero minimo per descrivere la risposta del materiale. Qualora le variabili interne adottate rappresentino un possibile meccanismo fisico dissipativo, allora successivi raffinamenti del modello possono venire introdotti direttamente sulle variabili interne, riducendo l'arbitrarietà del modello stesso.

In generale, per determinare la risposte di un materiale ad un determinato processo termodinamico dissipativo è necessario stabilire un funzionale di risposta che, attraverso la storia passata ed il valore attuale delle variabili indipendenti (es. deformazioni), permetta di determinare il valore attuale delle variabili dipendenti (es. tensioni). È il caso di un integrale ereditario nella teoria della viscosità o del lavoro plastico nella teoria della plasticità.

È immediato, allora, riscontate il vantaggio ottenuto dall'uso delle variabili interne, poiché ampliando le dimensioni dello spazio delle variabili di stato, la determinazione della risposta del materiale non richiede la memorizzazione di tutta la storia di trasformazioni subite dallo stesso, ma necessita solo la conoscenza dei valori attuali delle variabili indipendenti originarie e delle nuove variabili interne introdotte.

Nella modellazione dei materiali fragili le variabili interne sono variabili di danno e verranno indicate con il simbolo  $d$ . Nel caso più semplice,  $d$  è uno scalare e definisce conseguentemente uno stato di danno isotropo. Per rappresentare il livello di danno raggiunto nel materiale, si confronta la configurazione attuale del corpo con una ideale configurazione nella quale il materiale non presenta difetti interni.

Il materiale integro possiede una energia libera di Helmholtz per unità di volume data dalla relazione:

$$\psi_0 = \frac{1}{2} \varepsilon^T D_0 \varepsilon,$$

con  $D_0$  matrice di rigidezza del materiale integro, simmetrica e definita positiva. La stessa grandezza viene definita per il materiale danneggiato [Simo e Ju, 1987; Ju e al. 1989]:

$$\psi = (1-d)\psi_0,$$

con  $d$  variabile di danno compresa fra zero e uno. Le tensioni risultano:

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = (1-d) \frac{\partial \psi_0}{\partial \varepsilon} = (1-d) D_0 \varepsilon = D \varepsilon,$$

dove  $D = (1-d)D_0$  è la matrice secante del materiale danneggiato. Per un valore di danno nullo,  $D$  coincide con  $D_0$  e la deformabilità del materiale è pari a quella del materiale integro. Per un valore di danno unitario,  $D$  si annulla, non essendo più in grado il materiale completamente fratturato di sopportare alcuna tensione interna.

Il secondo principio della Termodinamica richiede che l'energia dissipata per unità di volume sia una quantità non negativa. Si ricava:

$$\gamma = -\frac{\partial \psi}{\partial d} \dot{d} = \psi_0 \dot{d} \geq 0.$$

Essendo  $\psi_0$  una quantità sicuramente positiva, ne consegue che la legge di evoluzione della variabile di danno deve essere sempre non decrescente. Qualora si vogliano modellare richiusure di lesioni sarà quindi necessario considerare, nel bilancio energetico, altre forme di energia, ad esempio chimica, per soddisfare la seconda legge della Termodinamica.

La precedente stabilisce che la funzione densità di energia elastica del materiale non danneggiato,  $\psi_0$ , è la grandezza termodinamicamente coniugata alla variabile di danno,  $d$ .

Nei materiali fragili, trascurando in prima approssimazione le deformazioni plastiche ed i fenomeni di isteresi, non si ha dissipazione energetica durante le fasi di scarico. In questo caso il parametro di danno rimane costante e la relazione costitutiva si scrive come:

$$\sigma = (1-d_M) D_0 \varepsilon,$$

con  $d_M$  valore massimo del danno raggiunto durante la fase di carico. La rigidezza del materiale allo scarico  $(1-d_M)D_0$ , supposto noto  $D_0$  permette di determinare il massimo livello di danno raggiunto.

### 2.2.1. Evoluzione del danno

Nel caso di danneggiamento isotropo si caratterizza il livello di danno attraverso una misura equivalente del danno,  $\zeta$ , in relazione alla quale sono definiti una soglia inferiore,  $r_0$  proprietà del materiale, ed il valore massimo  $r$  raggiunto nella storia di carico [Simo e Ju, 1987; Ju e al, 1989]:

$$r = \max(r_0, \max \zeta).$$

Nel caso di colonne in calcestruzzo non armate internamente e con sole fasciature esterne, la definizione della pressione laterale di confinamento e della effettiva area di conglomerato confinata non sono più problematiche e le formulazioni analitiche possono assumere una forma semplificata.

## 9.2. Risultati sperimentali

Si presentano ora le determinazioni eseguite presso il LaRM dell'Università di Bologna su cilindri in calcestruzzo e colonne in c.a. rinforzate con due diversi tipi di composito fibroso e secondo diversi spessori di ricoprimento.

La Tabella 9.2.1 riassume i valori sperimentali medi ottenuti saggiando provini standard di conglomerato. La simbologia adottata è la seguente:

$E_d$ : modulo elastico tangente;

$E_s$ : modulo elastico secante, calcolato sulla secondo tratto ascendente di carico, tra circa 1/5 e 1/2 del carico di rottura medio dei campioni non rinforzati;

$m$ : massa volumica;

$V_l$ : velocità di attraversamento di impulsi ultrasonici;

$f_c$ : resistenza a compressione;

$f_b$ : resistenza a trazione indiretta;

$f_f$ : resistenza a flessione;

$s$ : spessore di uno strato di tessuto composito fibroso;

$\varepsilon_{tu}$ : deformazione ultima in trazione

$\varepsilon_c$ : deformazione corrispondente alla resistenza a compressione;

$\varepsilon_{cu}$ : deformazione ultima in compressione;

$\nu$ : coefficiente di Poisson.

Tabella 9.2.1. Caratterizzazione del conglomerato cementizio.

Gruppo di campioni	$m$	$V_l$	$f_c$	$f_b$
	Kg/mc	m/s	MPa	MPa
cubi cls	2320	4270	40.7	4.1

Gruppo di campioni	$m$	$V_l$	$f_f$
	Kg/mc	m/s	MPa
prismi cls non rinf	2402	4542	4.6

Le caratteristiche di miscela del conglomerato impiegato sono di seguito riportate:

- dosaggio di cemento PTL 425: 400 Kg/m<sup>3</sup>;
- 1 parte in peso di ghiaia frantumata: diametro variabile da 8 a 15mm;
- 4 parti in peso di misto sabbia (sabbia e sabbione): diametro variabile da 0 a 8 mm;
- rapporto A/C=0.52;
- additivo fluidificante in quantità pari all'1% in peso del cemento.

Le caratteristiche meccaniche dei fogli di rinforzo, riferite allo spessore del tessuto di fibre secche, sono presentate nella Tabella 9.2.2. La sigla C indica un foglio di fibre unidirezionali di fibre di carbonio, la sigla V indica un tessuto di fibre di vetro (con un leggero ordito di fibre aramidiche).



Tabella 9.2.2. Caratteristiche meccaniche dei tessuti fibrosi di rinforzo impiegati.

Contr.	m	E	$\nu$	s	$f_t$	$\epsilon_{tu}$
	ton/mc	GPa		mm	MPa	%
V	1.2	26	0.1	1.2	399	1.6
C	1.1	235	= =	0.167	3510	1.5

In generale, i materiali compositi fibrosi a matrice polimerica (indenticati dalla sigla FRP o Fiber Reinforced Polymer) presentano una risposta spiccatamente elastica lineare fino a rottura e, quindi, un limitato allungamento a trazione.

### 9.2.1. Prove di compressione su cilindri di calcestruzzo

Nelle prove di compressione su cilindri e colonne, si è acquisita la deformazione circonferenziale nella sezione a metà altezza, mediante una catena metallica a rulli, strumentata con trasduttore di spostamento. La deformazione assiale è stata misurata come rapporto tra lo spostamento relativo dei piatti della pressa e l'altezza iniziale del campione.

Tabella 9.2.1.1. Risultati sperimentali sui cilindri fasciati e non.

Tipo	m	$V_l$	$f_c$	$\epsilon_{cu}$	$E_d$	$E_s$	Tipo rottura
	Kg/mc	m/s	MPa	%	GPa	GPa	
B	2337	4392	36.9	0.25	40.4	24.8	per schiacciamento
C-1strato	2341	4400	47.6	0.80	40.8	22.8	Sovrapp.+crisi trazione fibre
C-3strati	2340	4395	81.1	1.40	40.7	23.5	sovrapposizione
V-1strato	2332	4393	52.3	1.80	40.6	24.1	rottura a trazione fibre
V-3strati	2337	4392	98.0	3.20	40.4	25.2	rottura a trazione fibre

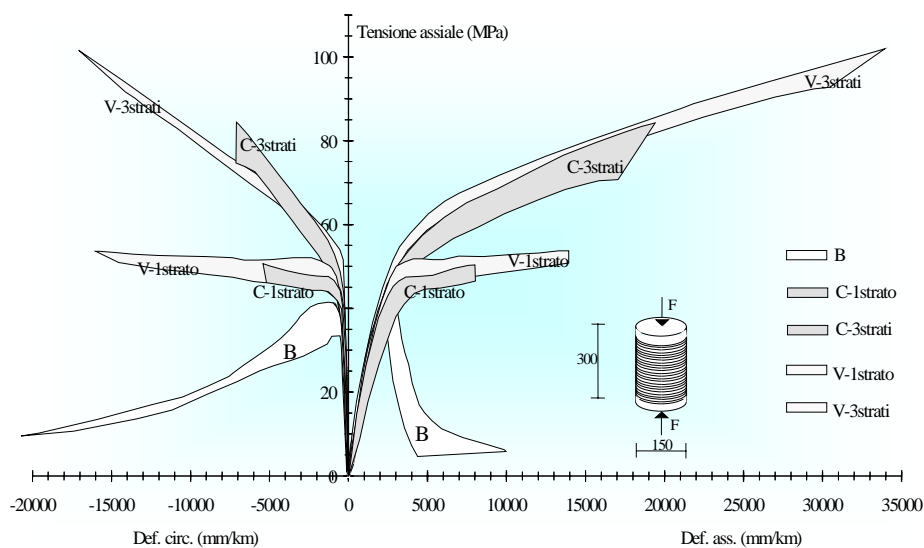


Figura 9.2.1.1. Fusi di dispersione dei diagrammi tensione nominale/deformazione media per cilindri rinforzati e non rinforzati.

I cilindri di conglomerato cementizio non armato, aventi diametro pari a 15 cm ed altezza pari a 30 cm, sono stati preventivamente spianati sulle facce di contatto con i piatti della pressa. Per i campioni rinforzati con 1 strato di fibre di carbonio si è operata una sovrapposizione di 10 cm di tessuto, per i campioni rinforzati con 3 strati di fibre di carbonio si è operata una sovrapposizione di 10 cm di tessuto per ogni strato, le sovrapposizioni sono state sfalsate di 120°C al fine di rendere il più simmetrico possibile il saggio di prova.

Per i campioni rinforzati con 1 strato di fibre di vetro si è operata una sovrapposizione di 15 cm di tessuto, per i campioni rinforzati con 3 strati di fibre di vetro si è operata una fasciatura continua con sovrapposizione finale di 15 cm di tessuto.

Tutte le prove sono avvenute tra i 7 e i 15 giorni dopo l'applicazione del composito di rinforzo.

La Tabella 9.2.1.1 riporta i valori medi sperimentali ottenuti dalle prove di compressione e le modalità di rottura riscontrate. Per ogni tipologia di rinforzo si sono saggiati 3 campioni.

La Figura 9.2.1.1 mostra i range dei risultati sperimentali ottenuti, in termini di tensione nominale-deformazione longitudinale media e di tensione nominale-deformazione circonferenziale media.

Il significato dei simboli in figura è il seguente: B = campioni non rinforzati, C-1strato = campioni rinforzati con 1 strato di fibre unidirezionali di carbonio, C-3strati = campioni rinforzati con 3 strati di fibre unidirezionali di carbonio, V-1strato = campioni rinforzati con 1 strato di fibre di vetro, V-3strati = campioni rinforzati con 3 strati di fibre di vetro.

### 9.2.2. Prove di compressione su colonne in c.a.

Le colonne saggiate, aventi diametro di a 350 mm ed altezza di 800 mm, sono state realizzate in conglomerato cementizio armato, con armatura in acciaio tipo FeB44k costituita da barre longitudinali  $\Phi = 16$  mm e staffatura circolare  $\Phi = 6$  mm a 100 mm di interasse. Il copriferro è pari a circa 40 mm. Per ogni tipo di rinforzo, si sono saggiati 3 campioni.

La Tabella 9.2.2.1 riporta i risultati sperimentali medi (la massa volumica è comprensiva della fasciatura esterna).

Tabella 9.2.2.1. Risultati sperimentali sulle colonne in c.a. fasciate e non.

Contr. campioni	m	V <sub>I</sub>	f <sub>c</sub>	ε <sub>cu</sub>	E <sub>d</sub>	E <sub>s</sub>	Tipo di rottura
	Kg/mc	m/s	MPa	%	GPa	GPa	
C	2407	4334	37.6	0.3	40.7	23.7	schacciamento cls
CC-1strato	2435	4283	44.0	0.4	40.1	27.4	Scollamento sovrapp.e trazione fibre
CC-3strati	2418	4271	57.3	1.3	39.7	22.0	Scollamento sovrapposizione
CV-1 strato	2539	4466	56.7	0.4	45.6	23.1	Trazione fibre
CV-2strati	2539	4270	55.1	0.6	41.7	21.3	Trazione fibre

La fasciatura con tessuti in fibra di carbonio è stata applicata in 3 fasce, simmetriche rispetto alla sezione di mezzeria del campione, di cui 1 centrale di 33 cm di larghezza e 2 laterali di 21 cm di larghezza ciascuna. Le fibre sono state disposte unicamente in direzione circonferenziale. Per i campioni rinforzati con 1 strato di fibre di carbonio si è operata una sovrapposizione di 10 cm di tessuto. Per i campioni rinforzati con 3 strati di fibre di carbonio si è operata una sovrapposizione di 10 cm di tessuto per ogni strato, le sovrapposizioni sono state sfalsate di 120°C, al fine di rendere il più simmetrico possibile il saggio di prova. Per i campioni rinforzati con 1 strato di fibre di vetro si è operata una sovrapposizione di 15 cm di tessuto. Per i campioni rinforzati con 2 strati di fibre di vetro si è operata una fasciatura continua con sovrapposizione finale di 15 cm di tessuto.

La Figura 9.2.2.1 riporta i range dei diagrammi tensione nominale/deformazione media (la deformazione circonferenziale è stata misurata a metà dell'altezza del provino). Il significato dei simboli in figura è il seguente: C = campioni non rinforzati, CC-1strato = campioni rinforzati con 1 strato di fibre unidirezionali di carbonio, CC-3strati = campioni rinforzati con 3 strati di fibre unidirezionali di carbonio, CV-1strato = campioni rinforzati con 1 strato di fibre di vetro, CV-3strati = campioni rinforzati con 3 strati di fibre di vetro.

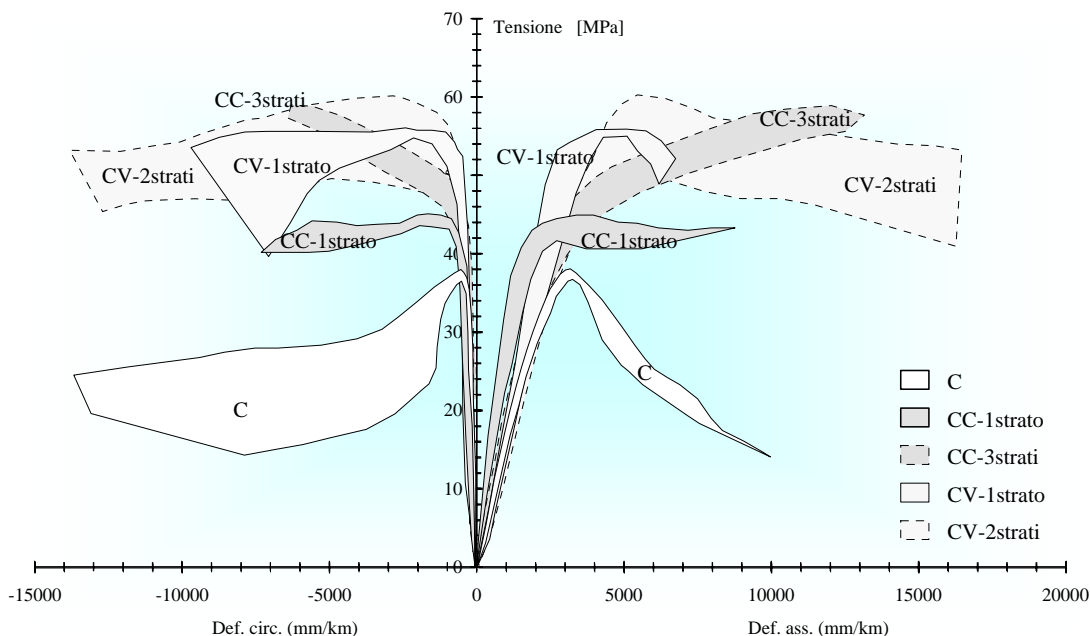


Figura 9.2.2.1. Involuppi dei risultati sperimentali ottenuti sulle colonne non rinforzate.

### 9.2.3. Considerazioni sulla curva volumetrica

Nella fase oltre il carico massimo del conglomerato non rinforzato, il provino perde la propria omogeneità per l'ampio sviluppo di fessure che dipendono dalla geometria, cioè dalla struttura e non più dal materiale. Il rapporto tra deformazioni circonferenziali e deformazioni longitudinali (che fino al momento della fessurazione rappresenta il coefficiente di Poisson) nella fase di fessurazione attinge valori prossimi a 4, nel caso di materiale non confinato, e valori tra 0.5 e 1 nel caso di materiale confinato.

Tale fenomeno si presta ad un'interessante interpretazione grafica, per mezzo della curva delle deformazioni volumetriche (o curva volumetrica):

$$\varepsilon_v = \varepsilon_l + 2\varepsilon_c,$$

dove:

$\varepsilon_l$  è la deformazione longitudinale;

$\varepsilon_c$  è la deformazione circonferenziale.

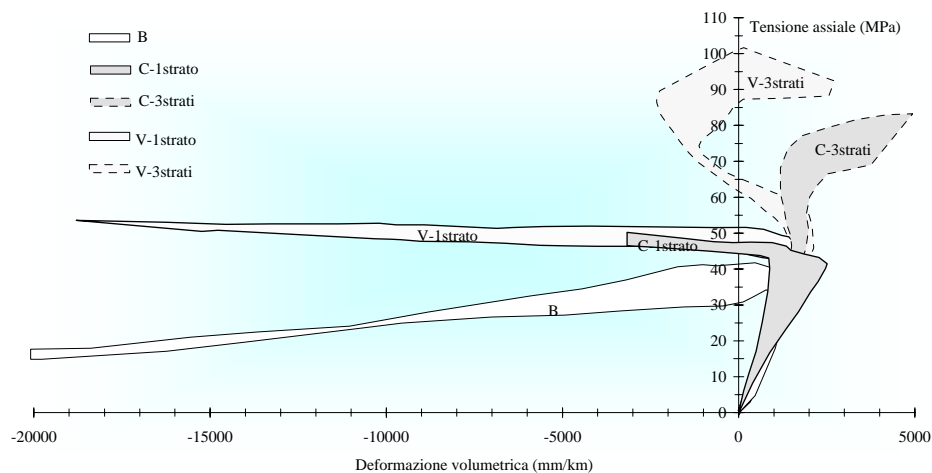
In quanto segue, la deformazione volumetrica si intenderà positiva se comporta diminuzione di volume.

Generalmente, le curve volumetriche presentano un primo tratto lineare, che corrisponde ad una fase di comprimibilità, cioè di diminuzione del volume ed un secondo tratto non lineare che corrisponde ad una fase di *propagazione stabile delle microfessure*. In certi, casi può instaurarsi una *propagazione instabile delle fessure*, da cui si instaura il fenomeno della *coalescenza* di più fessure in un'unica fessura. In altre parole, esiste un punto della curva volumetrica in cui essa assume valore massimo e che corrisponde alla massima diminuzione di volume del solido, dovuta alla compressione. In questo punto di minimo volume si ha condizione di *deformazione isocorica*, cioè a volume costante. A questa fase segue un aumento del volume perché la comprimibilità è contrastata dal collegamento reciproco delle varie fessure. Quindi, se inizialmente si ha, per compressione, una “chiusura” dei vuoti presenti nel solido di prova (porosità), in seguito si manifesta un fenomeno per così dire opposto di enucleazione di nuove fessure e collegamento di alcune delle fessure esistenti.

Le Figure 9.2.3.1 e 9.2.3.2 riportano gli involucri della deformazione volumetrica, sperimentalmente ottenuti, rispettivamente, per i cilindri e per le colonne.

Il punto di flesso, che precede il punto di minimo volume, corrisponde alla deviazione in aumento oltre l'usuale valore 0.2 del modulo di Poisson. Per livelli tensionali inferiori a quello corrispondente al punto di flesso, la deformazione volumetrica cresce in maniera *più che proporzionale* alla tensione. Oltre il flesso accade il contrario.

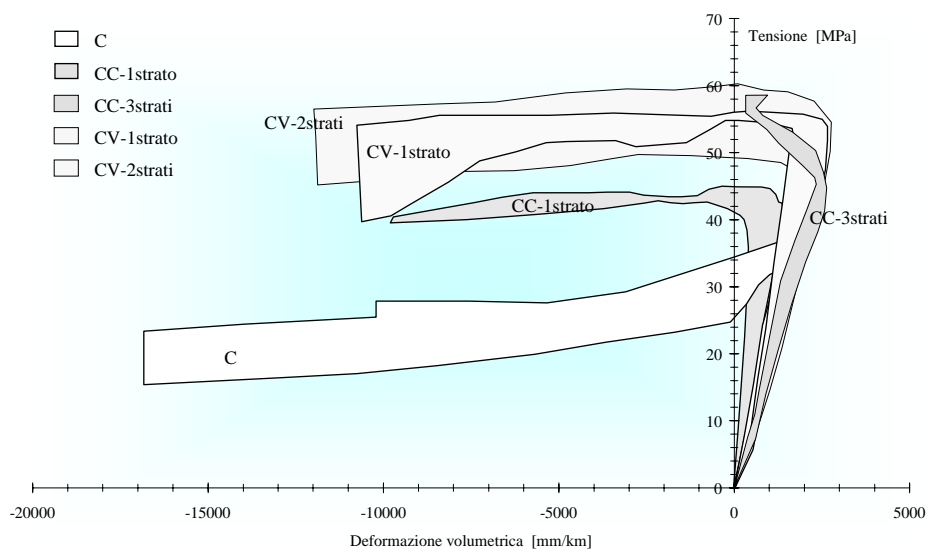
Dal confronto tra le curve volumetriche ed i diagrammi tensione nominale/deformazione media, si osserva, inoltre, che le curve di scarico al di sotto del livello tensionale corrispondente al punto di minimo volume (non riportate in figura per chiarezza di rappresentazione) rivolgono la propria concavità all'asse delle tensioni, mentre quelle di ricarico rivolgono la propria concavità all'asse delle deformazioni. Al contrario, oltre la tensione di minimo volume, le curve di scarico rivolgono la propria concavità verso l'asse delle deformazioni e quelle di successivo ricarico verso l'asse delle tensioni.



**Figura 9.2.3.1.** Involucri della deformazione volumetrica per i cilindri saggiati, deformazioni volumetriche di volume positive significano diminuzioni di volume.

Inoltre, nel caso di provini non confinati, la volumetrica è “governata” dalle deformazioni circonferenziali e si sviluppa nel campo delle deformazioni negative (convenzione dei materiali fragili). Nel caso di provini con 1 solo strato di rinforzo, si risente del confinamento e si hanno deformazioni trasversali più contenute, con uno sviluppo più modesto della volumetrica nel campo delle deformazioni negative. La situazione addirittura si inverte con 3 strati di rinforzo: dopo un andamento qualitativamente analogo ai precedenti fino al punto di minimo volume, la tangente

assume inizialmente valore negativo per poi tornare positiva. Questo secondo punto di inversione del segno della tangente corrisponde al momento in cui l'effetto di confinamento del rinforzo diventa preponderante sulla deformabilità circonferenziale del calcestruzzo per effetto Poisson e propagazione del quadro fessurativo.



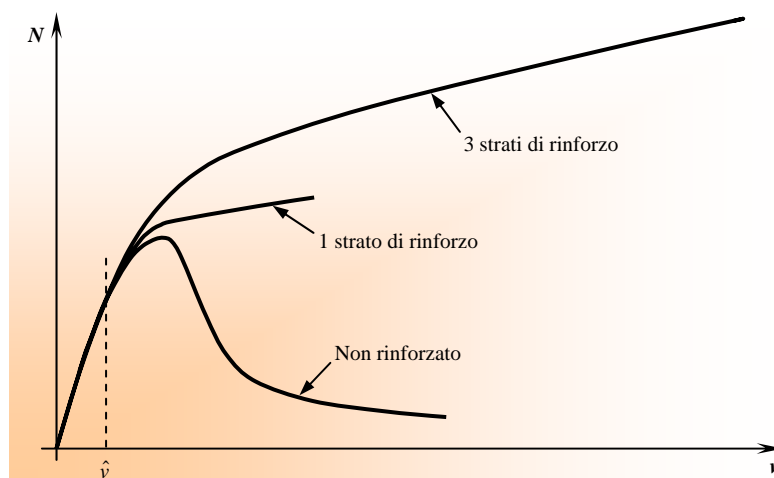
**Figura 9.2.3.2.** Involuppi della deformazione volumetrica per le colonne saggiate, deformazioni volumetriche di volume positive significano diminuzioni di volume.

La modalità di crisi dei provini rinforzati con vetro e lunghezza di sovrapposizione della giunzione pari a 15 cm è data dallo strappo del tessuto per raggiungimento della deformazione ultima a trazione. La rottura della sovrapposizione si manifesta invece nei provini rinforzati con fibra di carbonio e con lunghezza di sovrapposizione pari a 10 cm. Quest'ultimo meccanismo deve essere evitato perché provoca crisi dei provini per carichi inferiori a quelli attesi. Analogamente, la deformazione circonferenziale ultima raggiunta dai campioni saggiati è quasi sempre inferiore alla deformazione ultima in trazione monoassiale della fibra. A giustificazione di questi risultati, è il danneggiamento localizzato che il provino subisce nelle zone di estremità a contatto con i piatti della pressa. In queste zone, infatti, si registrano forti deformazioni che portano al collasso prematuro del rinforzo.

### 9.3. Modello di interfaccia solido cilindrico in calcestruzzo/tessuto in FRP

Dalle prove sperimentali eseguite su provini cilindrici in calcestruzzo fasciati con materiali compositi, è emerso che il contributo della fasciatura inizia ad essere sensibile solo a partire da un determinato valore di spostamento relativo  $\hat{v}$  dei piatti della pressa. Infatti (Figura 9.3.1), i diagrammi sperimentali carico/spostamento relativi ai provini rinforzati con tessuti in materiale polimerico conservano la stessa tangente all'origine dei diagrammi sperimentali carico/spostamento relativi ai provini non rinforzati. Inoltre, i diagrammi relativi ai provini fasciati non si discostano sensibilmente da quelli relativi ai provini non fasciati fino al valore di spostamento relativo  $\hat{v}$ , segno

evidente che, fino a questo valore di spostamento relativo, la fasciatura non è ancora entrata in coazione.

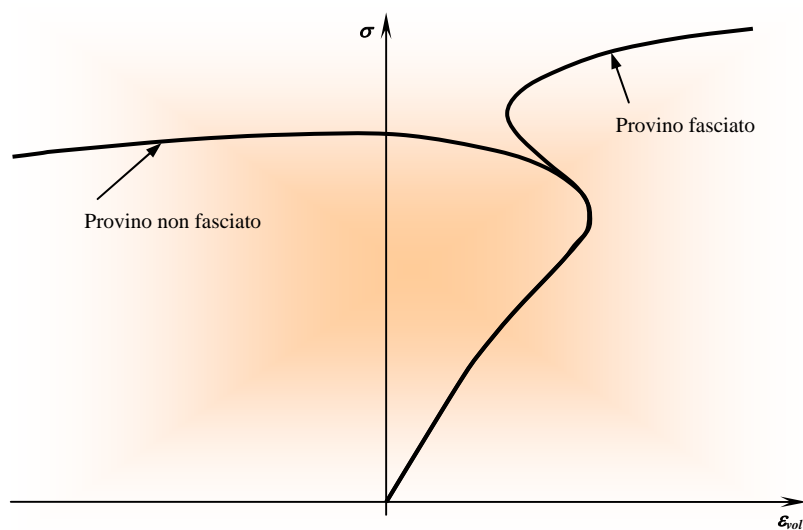


**Figura 9.3.1.** Confronto tra i diagrammi carico/spostamento ottenuti per provini cilindrici non rinforzati, rinforzati con 1 strato di tessuto polimerico in fibra di carbonio e rinforzati con 3 strati di tessuto polimerico in fibra di carbonio.

Questo comportamento si riflette sulla forma delle curve volumetriche rilevate sperimentalmente. Come noto, tali curve, quando riferite a provini in calcestruzzo in compressione monoassiale (Figura 9.3.2), si sviluppano inizialmente in campo negativo in modo proporzionale al carico esterno, per poi assumere tangente verticale ed invertire tendenza, fino ad entrare in campo positivo.

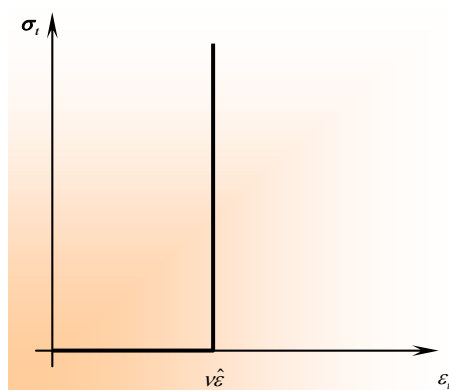
Usualmente, la prima parte della curva, fino al punto in cui la tangente diventa verticale, viene detta zona a comportamento contraente, mentre la parte rimanente della curva viene detta zona a comportamento dilatante. Queste diciture sottintendono l'idea che un volume infinitesimo di calcestruzzo compresso possa indifferentemente esibire variazione volumetrica negativa, ovvero positiva, in funzione del generico passo di carico. La ricaduta sul modulo di Poisson del calcestruzzo di una tale ipotesi è l'assunzione di leggi di variazione funzioni dello stato di sollecitazione o, equivalentemente, di deformazione. In realtà, come osservato al §..., ricavando le leggi di variazione del modulo di Poisson da misure di deformazione rilevate internamente al nocciolo resistente, e non superficialmente, si può assumere che il modulo di Poisson sia sensibilmente indipendente dallo stato di sollecitazione e di deformazione. In tutto quanto verrà detto nel seguito, allora, occorre ricordare che, essendo la curva volumetrica identificata sperimentalmente a partire da misure di deformazione rilevate superficialmente, essa denota sempre una proprietà caratteristica della struttura (in questo caso il provino cilindrico) e non del materiale.

Precisato questo, è lecito aspettarsi che il contributo di un rinforzo applicato sulla superficie esterna di un provino cilindrico si rifletta in una curva volumetrica in cui il comportamento dilatante sia sensibilmente ridotto, se non del tutto assente. A causa della tardiva entrata in coazione dello strato di rinforzo, però, si ottengono curve volumetriche sperimentali che ricalcano per buona parte della prova di carico le curve ottenute in assenza di rinforzo (Figure 9.2.3.1 e 9.2.3.2). In effetti, la fasciatura inizia ad esercitare un contributo significativo proprio al subentrare del comportamento dilatante della struttura. Quest'ultimo risulta ridotto in misura crescente con lo stato di coazione del rinforzo superficiale, fino a scomparire del tutto e lasciare il posto ad una seconda zona a comportamento contraente.



**Figura 9.3.2.** Curve volumetriche relative a provini non rinforzati e a provini rinforzati: per convenzione, i valori di deformazione volumetrica riportati sul semiasse positivo delle x sono quelli negativi.

L'esistenza di un valore minimo di spostamento relativo al di sotto del quale lo strato di rinforzo non entra in coazione può essere giustificato a partire dall'analisi dell'interfaccia calcestruzzo – rinforzo. Infatti, tenendo anche conto di eventuali problemi di accoppiamento, è lecito assumere che tale interfaccia, rappresentata da resina epossidica, si deformi con rigidità nulla fino ad un determinato valore di deformazione, superato il quale inizi a trasmettere il carico in modo pressoché perfetto.



**Figura 9.3.3.** Legame costitutivo adottato per l'interfaccia calcestruzzo – strato di rinforzo.

Per tenere conto dell'evidenza sperimentale, nella modellazione dell'interfaccia calcestruzzo-tessuto in FRP del cilindro fasciato compresso si è introdotto un legame costitutivo a bilatera . L'andamento qualitativo del modello d'interfaccia è illustrato in Figura 9.3.3, in cui  $\varepsilon_t$  e  $\sigma_t$

rappresentano, rispettivamente, la deformazione e la tensione in direzione trasversale al provino (ortogonale al tessuto in composito), mentre il valore  $\hat{\varepsilon}$  è così definito:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{v}}{h},$$

con  $\hat{v}$  spostamento relativo in direzione longitudinale per il quale il tessuto entra in coazione e  $h$  altezza del provino.

Con il modello di interfaccia adottato, la resina assorbe lo spostamento radiale per effetto Poisson del provino cilindrico senza assumere carico fino al valore di deformazione  $\nu\hat{\varepsilon}$ . Oltrepassato questo valore di deformazione, la resina si comporta rigidamente, trasmettendo al rinforzo lo spostamento radiale senza deformarsi ulteriormente.

#### 9.4. Programma di simulazione analitica

Il programma di simulazione analitica utilizzato per la modellazione del comportamento macroscopico dei solidi compressi in calcestruzzo fasciati con tessuti in FRP è un'estensione del programma utilizzato per la modellazione del comportamento macroscopico dei solidi compressi in calcestruzzo non fasciati (Capitolo 7).

L'estensione consiste nell'imposizione di forze concentrate sul contorno esterno del cilindro che tengano conto dell'azione confinante del composito applicato. Tale imposizione viene fatta in accordo con il modello di interfaccia solido cilindrico in calcestruzzo/tessuto in FRP presentato al §9.3. In particolare, detto  $sp_{\max}$  lo spostamento massimo in direzione radiale che un cilindro di raggio  $r$  può esibire senza mandare in coazione la fibra, finché la circonferenza  $c$  della configurazione deformata della generica sezione trasversale del solido cilindrico in calcestruzzo si mantiene inferiore al valore:

$$c_{\max} = 2\pi(r + sp_{\max}),$$

si ricade nel caso già esaminato di modellazione del comportamento macroscopico dei solidi compressi in calcestruzzo non fasciati.

Questa assunzione equivale all'ipotesi secondo la quale la tecnica seguita per l'applicazione del tessuto in FRP non è in grado di garantire una perfetta adesione tra il tessuto stesso e la superficie laterale del solido cilindrico in calcestruzzo. Da ciò segue che il tessuto all'atto dell'applicazione risulta, per così dire, "lento", per un eccesso di tessuto applicato rispetto a quello strettamente necessario per fasciare in aderenza perfetta la superficie laterale del solido cilindrico in calcestruzzo. Secondo questa ipotesi, il tessuto in FRP inizia a lavorare solo quando la circonferenza  $c$  della configurazione deformata della generica sezione trasversale del solido cilindrico in calcestruzzo assume il valore  $c_{\max}$ , corrispondente alla lunghezza delle strisce di tessuto effettivamente applicato. Da questo momento in poi, il tessuto inizia a deformarsi e la sua deformazione assume il valore:

$$\varepsilon = \frac{2\pi(r' - r - sp_{\max})}{2\pi(r + sp_{\max})} = \frac{U - sp_{\max}}{r + sp_{\max}},$$

dove con  $r'$  si è indicato il raggio della configurazione deformata, mentre con  $U$  si è indicato il valore assoluto dello spostamento in direzione radiale dei punti posti sulla generica sezione



trasversale del solido cilindrico in calcestruzzo. La deformazione è positiva in quanto corrisponde ad un allungamento delle fibre di composito.

In seguito a questa deformazione, nel tessuto in FRP si instaura uno stato tensionale di trazione di valore:

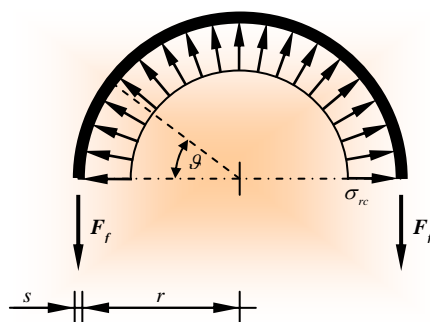
$$\sigma = E_f \frac{U - sp_{\max}}{r + sp_{\max}},$$

avendo indicato con  $E_f$  il modulo elastico del tessuto in FRP.

Le forze esterne e le forze interne che agiscono su di una striscia unitaria di tessuto in FRP solidale alla generica sezione trasversale del cilindro sono rappresentate in Figura 9.4.1, dove:

$\sigma_{rc}$  è la tensione radiale trasmessa al tessuto in FRP di altezza unitaria dal solido cilindrico in calcestruzzo;

$F_f$  è la risultante degli sforzi assiali di trazione che agiscono sulla generica sezione di altezza unitaria e spessore  $s$  del tessuto in FRP.



**Figura 9.4.1.** Schema statico di una striscia unitaria di tessuto in FRP solidale alla generica sezione trasversale del cilindro.

Con i simboli riportati in Figura 9.4.1, l'equilibrio della generica striscia unitaria di tessuto in FRP si esprime come segue:

$$2s\sigma_f = 2r \int_0^{\pi/2} \sigma_{rc} \sin \vartheta d\vartheta$$

avendo indicato con:

$$\sigma_f = \frac{F_f}{s},$$

lo sforzo assiale di trazione che agisce sulla generica sezione di altezza unitaria e spessore  $s$ . Dalla condizione di equilibrio si ricava immediatamente:

$$\sigma_{rc} = \frac{s}{r} \sigma_f,$$

ovvero, per una generica configurazione deformata:

$$\sigma_{rc} = \frac{S}{r'} \sigma_f,$$

che esprime il legame tra la pressione di confinamento  $\sigma_{rc}$  e lo sforzo di trazione  $\sigma_f$  nel tessuto di FRP.

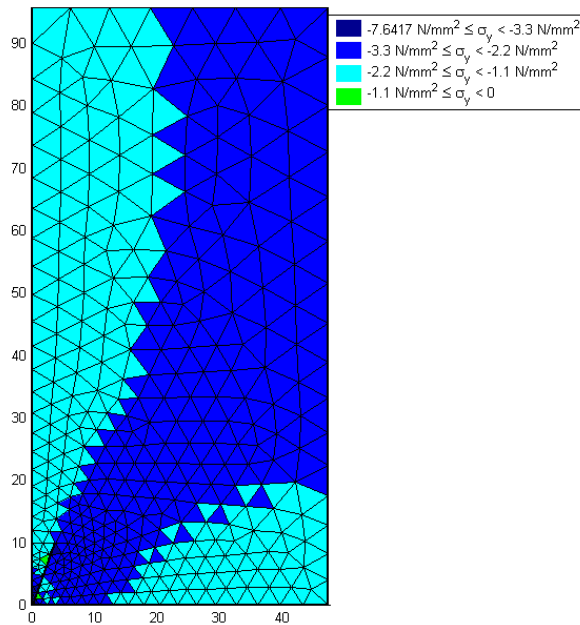


Figura 9.4.2. Distribuzione delle tensioni in direzione assiale ( $\sigma_y$ ) senza FRP.

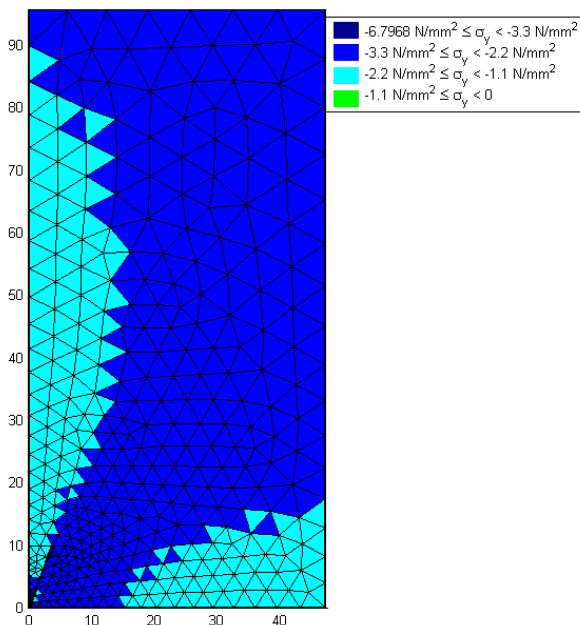


Figura 9.4.3. Distribuzione delle tensioni in direzione assiale ( $\sigma_y$ ) con FRP.

Sostituendo in quest'ultima espressione il valore tensionale del tessuto in FRP ricavato in accordo con le considerazioni sul legame di interfaccia solido cilindrico in calcestruzzo/tessuto in FRP, si ottiene l'espressione esplicita della pressione di confinamento  $\sigma_{rc}$ :

$$\sigma_{rc} = \frac{s}{r'} E_f \frac{U - sp_{\max}}{r + sp_{\max}}$$

Tramite la variabile  $s$ , il modello analitico è in grado di valutare lo stato tenso-deformativo conseguente all'evoluzione del quadro fessurativo principale in un solido cilindrico in calcestruzzo, fasciato con un numero generico di strati di rinforzo di modulo elastico  $E_f$ .

L'incognita  $sp_{\max}$  che compare nella formula precedente è stata stimata per confronto con i dati sperimentali presentati al § 9.2.3, interpretando il subentrare della seconda fase contraente nelle curve volumetriche dei cilindri rinforzati come il momento in cui il tessuto di rinforzo in FRP entra in coazione.

Le Figure 9.4.2 e 9.4.3 mettono a confronto lo stato tensionale in direzione assiale del solido cilindrico fessurato in calcestruzzo, fornito dal modello analitico sotto le ipotesi, rispettivamente, di assenza e di presenza di rinforzo esterno in FRP. La Figura relativa a questo secondo caso è stata ricavata nell'ipotesi che la deformazione circonferenziale del solido cilindrico sia tale da avere:

$$U > sp_{\max}$$

su tutte le sezioni trasversali.

Come già fatto osservare al § 7.6, il modello analitico è in grado di evidenziare molto bene l'alterazione allo stato tensionale del solido cilindrico dovuta al propagarsi di un quadro fessurativo dominante.

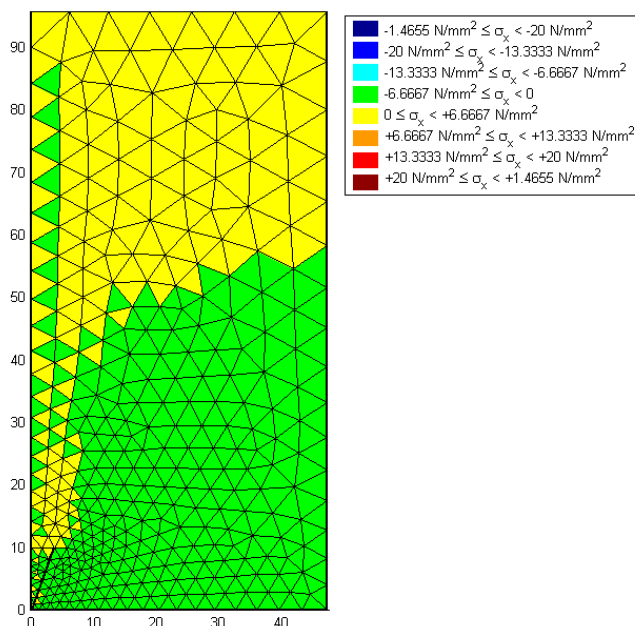


Figura 9.4.4. Distribuzione delle tensioni in direzione ortogonale all'asse ( $\sigma_x$ ) senza FRP.

Inoltre, il modello analitico è in grado di mettere in evidenza come l'applicazione del tessuto di rinforzo in FRP interagisca con la propagazione del crack dominante nella definizione dello stato tenso-deformativo del solido cilindrico in calcestruzzo. Infatti, se la Figura 9.4.2 restituisce un'immagine immediata del decremento di area resistente che si instaura nei solidi cilindrici non rinforzati per la propagazione del quadro fessurativo dominante, la Figura 9.4.3 restituisce un'immagine altrettanto immediata di come l'effetto confinamento offerto dal tessuto di rinforzo induca la parte del solido che si è scaricata per effetto della propagazione del crack a collaborare con la parte rimanente in misura crescente con la quantità di rinforzo applicato. Ciò si riflette in un valore di area resistente maggiore rispetto al caso non confinato e sensibilmente più vicino a quello dell'area nominale del solido cilindrico.

Analoghe considerazioni valgono per il confronto tra lo stato tensionale in direzione radiale del solido cilindrico fessurato in calcestruzzo, fornito dal modello analitico sotto le ipotesi, rispettivamente, di assenza e di presenza di rinforzo esterno in FRP (Figure 9.4.4 e 9.4.5).

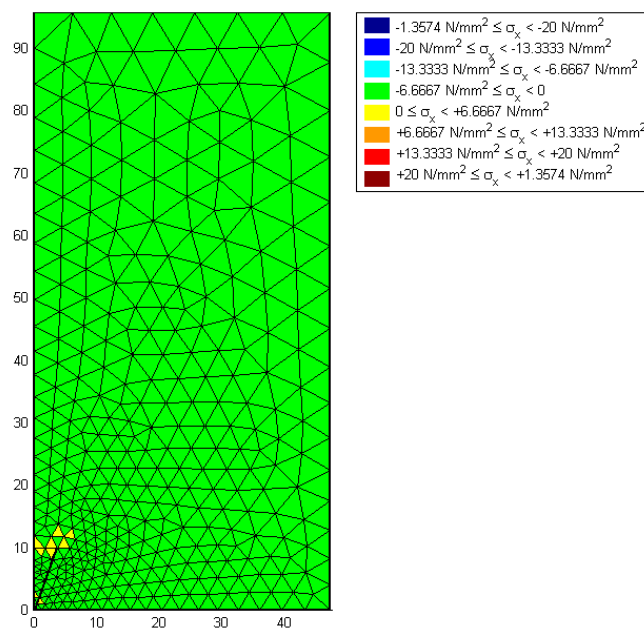


Figura 9.4.5. Distribuzione delle tensioni in direzione ortogonale all'asse ( $\sigma_x$ ) con FRP.

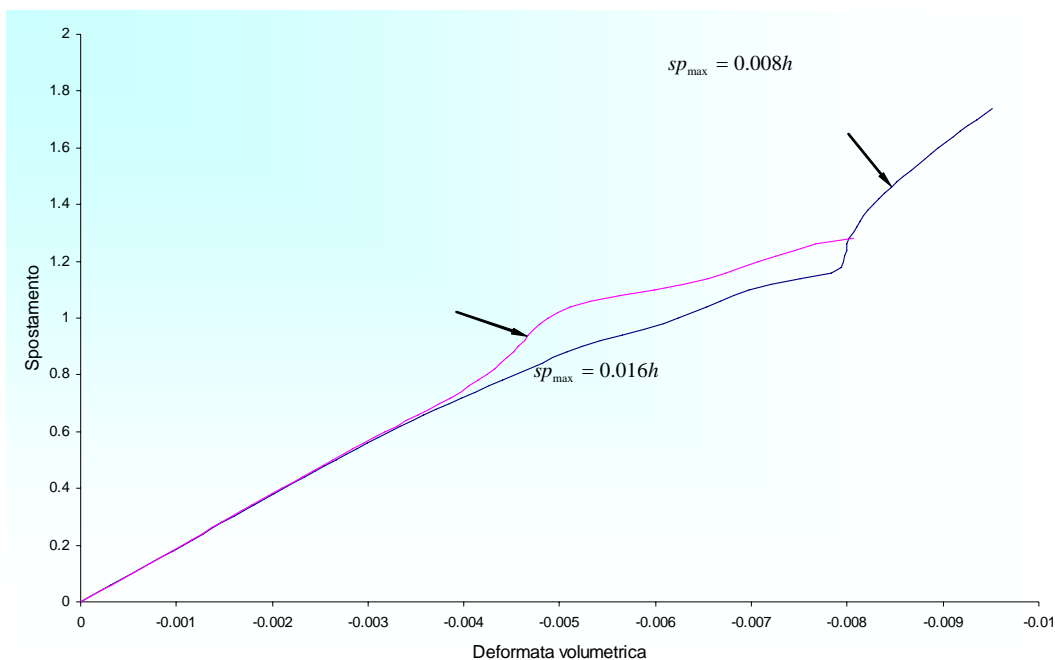
## 9.5. Risultati analitici

I risultati analitici presentati in questo paragrafo sono relativi alla simulazione numerica delle prove di compressione su cilindri fasciati con fibro-rinforzati in carbonio presentati al § 9.2.1.

Per quanto riguarda il valore di spostamento radiale  $sp_{max}$  per il quale il tessuto di rinforzo entra in coazione, si è effettuata un'analisi numerica preventiva per verificare la sensibilità del modello adottato alla variazione di questo parametro. I risultati di questa analisi numerica preventiva relativi al provino cilindrico rinforzato con 3 strati di carbonio sono riportati in Figura 9.5.1, in termini di incidenza del parametro  $sp_{max}$  sulla forma della curva volumetrica analitica. Come emerge dalla Figura 9.5.1, il risultato analitico relativo a 3 strati di tessuto di rinforzo in fibra di carbonio esibisce una zona a comportamento dilatante appena accennata, se non del tutto assente. In

ogni caso, è sempre possibile identificare due fasi a comportamento contraente, per la prima delle quali, la risposta strutturale è da imputare principalmente al comportamento del solido in calcestruzzo, mentre, per la seconda, la risposta strutturale è da imputare principalmente al contributo dello strato di rinforzo.

Volendo identificare una zona di transizione fra le due zone a comportamento contraente, è possibile affermare che le variazioni del parametro  $sp_{max}$  si riflettono in una traslazione di questa zona di transizione. In particolare, al decrescere del valore di  $sp_{max}$  risulta amplificata la prima zona a comportamento contraente e la zona di transizione si sposta nella direzione delle deformazioni volumetriche negative.



**Figura 9.5.1.** Incidenza del parametro  $sp_{max}$  sulla forma della curva volumetrica analitica (con  $h$  si è indicato l'altezza del provino cilindrico).

Il confronto tra le curve volumetriche analitiche ottenute per il cilindro non fasciato e per il cilindro fasciato, rispettivamente, con 1 e 3 strati di tessuto in fibra di carbonio viene invece presentato in Figura 9.5.2. L'andamento qualitativo delle curve in Figura 9.5.2 è in buon accordo con l'andamento osservato sperimentalmente. In particolare:

- la curva volumetrica relativa al provino non fasciato presenta una prima zona a comportamento contraente ed una seconda zona a comportamento dilatante;
- le curve volumetriche relative ai provini fasciati non denotano insorgere di comportamento dilatante, ma esibiscono zone a comportamento contraente il cui andamento può essere attribuito al prevalere sulla risposta strutturale delle caratteristiche meccaniche del provino in calcestruzzo, ovvero delle caratteristiche meccaniche del tessuto di rinforzo.

Inoltre, come emerge dall'analisi numerica preventiva sulla forma della curva volumetrica analitica, l'andamento qualitativo può essere migliorato e reso più aderente al risultato sperimentale tramite studio parametrico sul parametro  $sp_{max}$ .

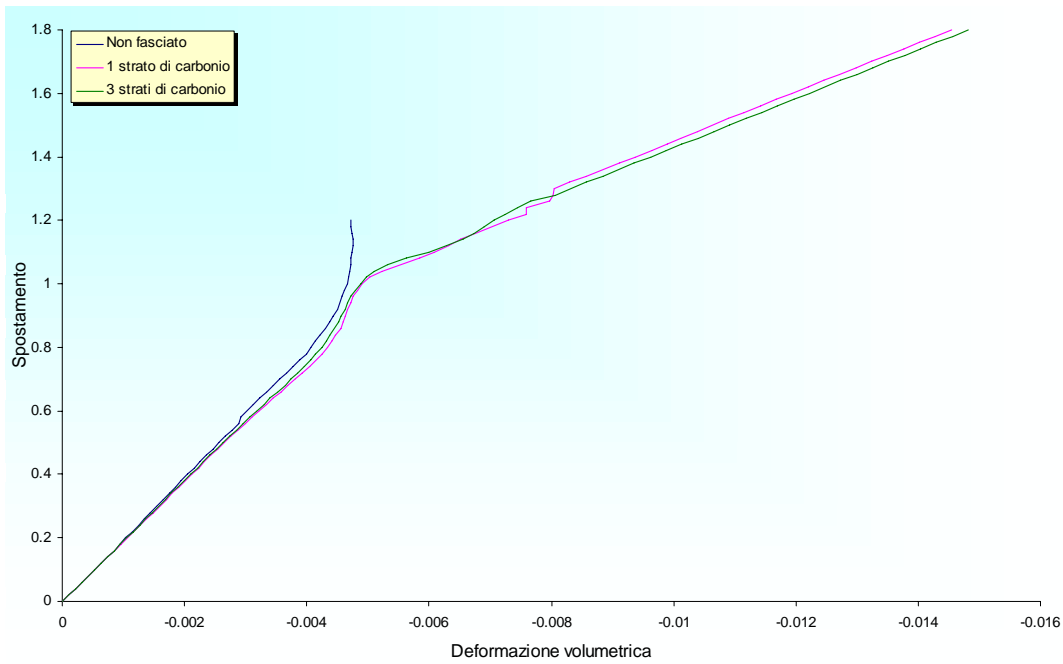


Figura 9.5.2. Curve volumetriche analitiche con e senza fasciatura in tessuto di fibra di carbonio.

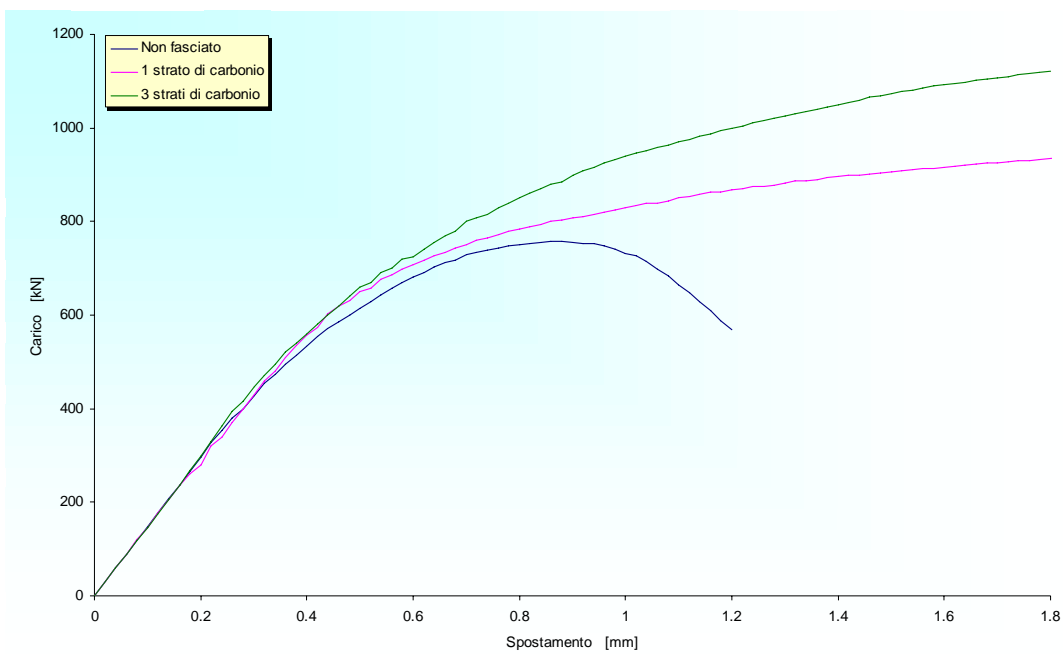


Figura 9.5.3. Curve carico - spostamento analitiche con e senza fasciatura in tessuto di fibra di carbonio.

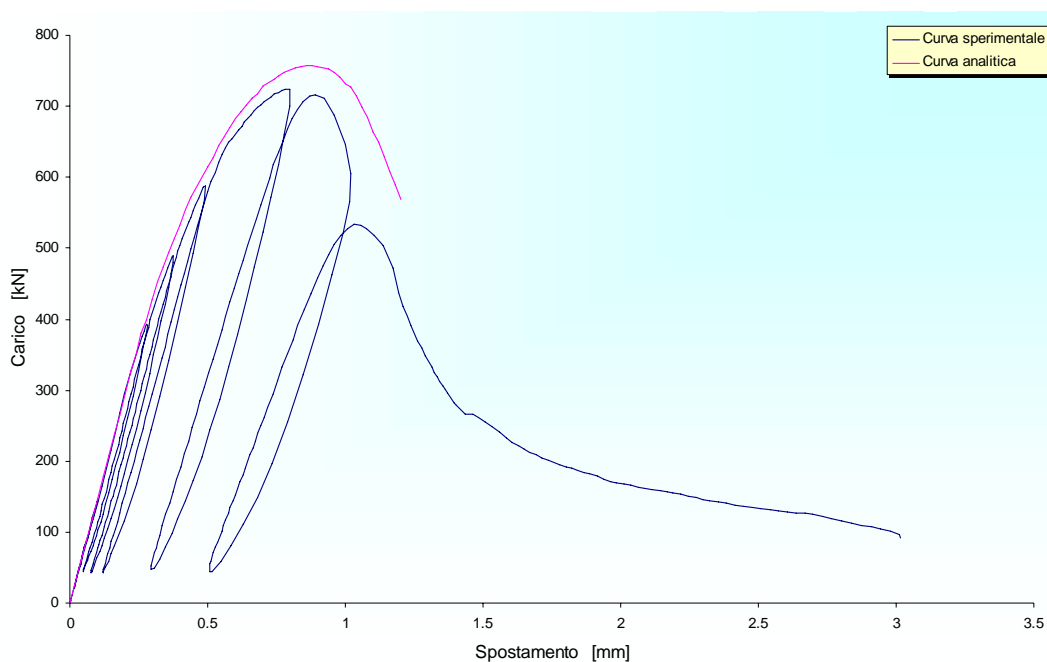
Infine, in Figura 9.5.3 si sono riportate le curve carico - spostamento analitiche ottenute per il cilindro non fasciato e per il cilindro fasciato con 1 e 3 strati di tessuto in fibra di carbonio.

Anche in questo caso, l'andamento qualitativo delle curve proposte è in buon accordo con l'andamento osservato sperimentalmente. In particolare:

- la curva carico/spostamento relativa al provino non fasciato esibisce un ramo a comportamento softening;
- le curve carico/spostamento relative ai provini fasciati esibiscono comportamento monotono crescente.

Occorre osservare, a questo punto, che la risposta macroscopica analitica fornita dal modello è più rigida della risposta macroscopica sperimentale (Figure 9.5.4, 9.5.5 e 9.5.6). Ciò è dovuto alle semplificazioni introdotte nel modello utilizzato: in particolare, è lecito attribuire la maggiore rigidità della risposta analitica all'ipotesi fondante il modello analitico, secondo la quale tutto il danno subito dal provino è concentrato in un unico macro-crack. In realtà l'evidenza sperimentale insegna che, accanto al macro-crack responsabile dell'attivazione della superficie di scorrimento principale, si attivano numerosi micro-crack secondari, localizzati nella parte periferica del provino isolata dal macro-crack. Come si è visto dall'analisi della mappatura dello stato tensionale (§ 7.6), questa parte periferica contribuisce anch'essa, seppur in maniera ridotta, al carico esterno applicato. L'attivazione di micro-crack nella zona periferica, allora, si riflette inevitabilmente in una risposta macroscopica meno rigida di quella che si ottiene analiticamente con l'ipotesi di un unico macro-crack.

Anche se passibile di ulteriori raffinamenti dal punto di vista quantitativo, il modello analitico proposto è comunque in grado di cogliere l'andamento qualitativo del fenomeno. Ovvero, è in grado di stimare, in accordo con l'evidenza sperimentale, la graduale scomparsa dell'andamento softening, che caratterizza il comportamento macroscopico dei provini in calcestruzzo non rinforzati, quando al provino vengano applicati strati continui di rinforzo in materiale composito. E, cosa di particolare rilievo, tutto ciò viene valutato a partire da una legge costitutiva del calcestruzzo di tipo monotono crescente, stimando la variazione di rigidità strutturale del provino per l'evolversi di un quadro fessurativo dominante e lasciando come unica variabile del modello lo spessore dello strato di rinforzo esterno.



**Figura 9.5.4.** Confronto tra la curva sperimentale e la curva analitica per il provino non rinforzato.

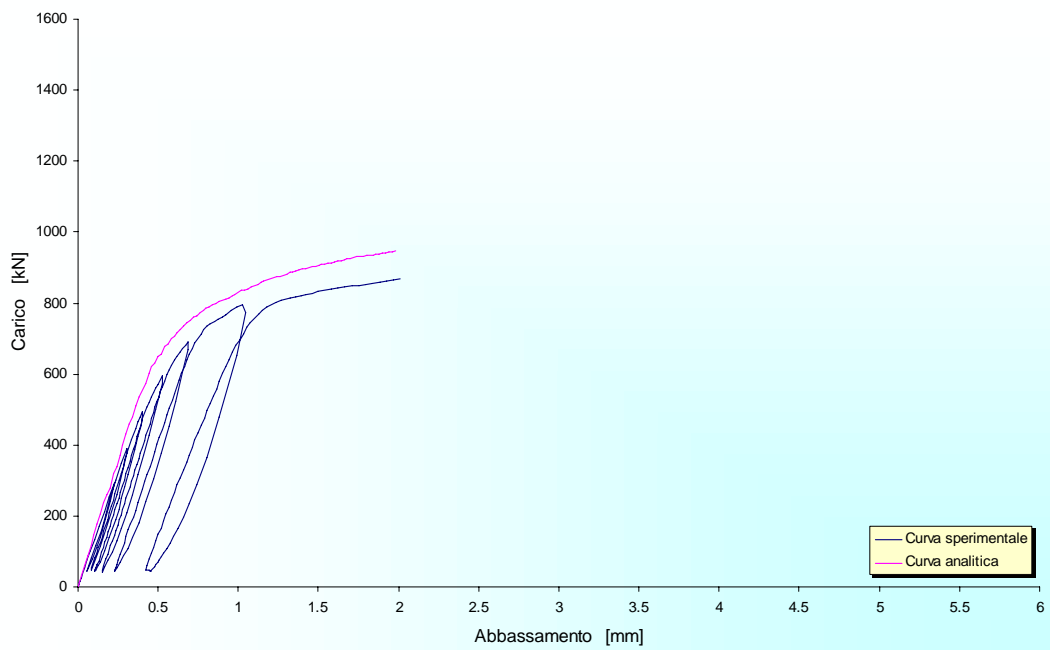


Figura 9.5.5. Confronto tra la curva sperimentale e la curva analitica per il provino rinforzato con 1 strato di FRP.

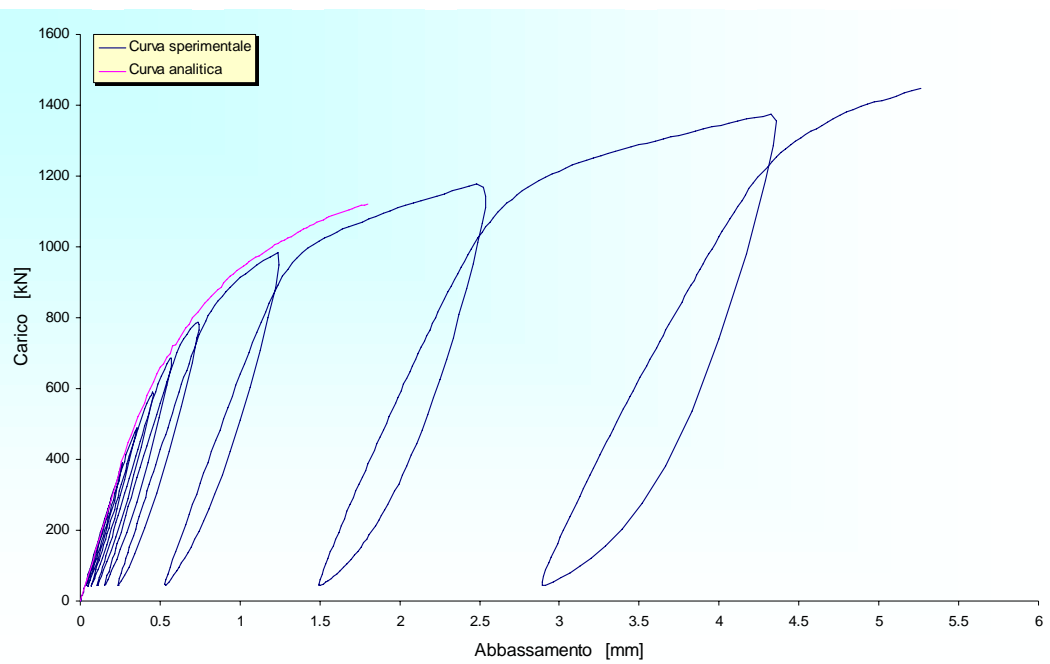


Figura 9.5.6. Confronto tra la curva sperimentale e la curva analitica per il provino rinforzato con 3 strati di FRP.





## CAP. 10. CONSIDERAZIONI FINALI

### Motivazioni di base

La modellazione del comportamento del cilindro fasciato in compressione, oggetto di questa Tesi di Dottorato, richiede la conoscenza preventiva delle proprietà costitutive del calcestruzzo e del tessuto in materiale composito usato per il rinforzo esterno, oltre che di quelle dell'interfaccia calcestruzzo – strato di rinforzo.

Per quanto riguarda la caratterizzazione meccanica dei tessuti in materiale composito, si può ritenere che le determinazioni sperimentali presenti in letteratura siano sufficientemente accurate (Capitolo 8).

Analogamente, le caratteristiche dell'interfaccia calcestruzzo – strato di rinforzo sono facilmente identificabili dall'esame dei risultati delle campagne sperimentali condotte, in un esteso arco di anni, presso in La.R.M. della Facoltà di Ingegneria di Bologna, che indicano un accoppiamento tra i due materiali dipendente dal valore di spostamento radiale del solido di prova (§ 9.3).

Per quanto riguarda, invece, ciò che viene comunemente indicato come legame costitutivo del calcestruzzo, la non obiettività di tale legame nei riguardi degli effetti dimensionali e delle condizioni di carico triassiale e l'impossibilità di associare un significato fisico al ramo softening di un legame caratterizzante l'intorno infinitesimo (§ 1.1) impongono di ideare un approccio innovativo di identificazione, a partire dai risultati sperimentali.

Sempre nel caso di solidi fasciati, o in generico stato di triassialità, anche il modulo di Poisson, per come viene comunemente identificato, fornisce valori in netto disaccordo con i limiti fisici di accettabilità (§ 1.1). Ancora una volta, quindi, si rende necessario individuare un processo di identificazione di una proprietà costitutiva del calcestruzzo più aderente alla realtà fisica.

La necessità di porre l'attenzione sull'accuratezza dell'identificazione delle proprietà costitutive del calcestruzzo sembra essere confermata anche dalla difficoltà con la quale le modellazioni presentate fino ad oggi in letteratura riescono a descrivere il comportamento dei solidi fasciati, al variare dello spessore dello strato di rinforzo esterno (§ 1.1). I migliori risultati ottenuti in questa direzione sono fondati su concetti derivati dalla Meccanica del Continuo Danneggiato e dalla Meccanica della Frattura con Danno (§ 2.2, 2.3). Anche in questi casi, tuttavia, le modellazioni riescono a descrivere solo la singola prova sperimentale, agendo, di norma, su un certo numero di parametri, spesso non associati ad un preciso significato fisico.

### Identificazione delle proprietà costitutive del calcestruzzo

Per tutti questi motivi, la modellazione oggetto della Tesi di Dottorato ha richiesto un'approfondita indagine preventiva, di carattere analitico e sperimentale (Capitoli 3, 4 e 5), su solidi compressi cilindrici in calcestruzzo non fasciati.

L'analisi dei risultati sperimentali di questa indagine preventiva è stata imperniata sul tentativo di discriminare tra i vari fattori che concorrono a determinare un risultato sperimentale (§ 1.2), con particolare attenzione alla variazione del "peso" che i singoli fattori assumono sul risultato finale al procedere del processo di carico.

In particolare, è emerso che il "peso" esercitato sul risultato sperimentale dalle proprietà costitutive del materiale di cui è composto il solido di prova, pur

essendo considerevole, sotto certe condizioni, nei primi passi del generico processo di carico, decresce al procedere del danno provocato, fino ad assumere valori del tutto irrilevanti.

Ciò ha portato all'impossibilità di mettere in relazione diretta, per mezzo di un semplice fattore di scala, il risultato sperimentale, in termini di diagrammi carico/spostamento, con il legame costitutivo del materiale, in termini di tensione/deformazione. Da qui la necessità di introdurre una nuova terminologia per distinguere il legame costitutivo del calcestruzzo proposto in questa Tesi di Dottorato dai legami tensione media/deformazione media che, invece, sono derivati in letteratura proprio per mezzo di un fattore di scala dai diagrammi sperimentali carico/spostamento. Il legame costitutivo presentato nel seguito è stato indicato col termine "legame tensione effettiva/deformazione effettiva".

La giustificazione del tentativo operato in questa Tesi di Dottorato di discriminare tra i vari fattori che concorrono alla formazione di un risultato sperimentale deriva direttamente dall'osservazione sperimentale sul meccanismo di crisi dei solidi compressi in calcestruzzo non fasciati (§ 2.5). Infatti, l'osservazione sperimentale insegna che i provini in calcestruzzo soggetti a carico normale centrato vengono separati in due porzioni, delle quali, la parte centrale, indicata in questa Tesi di Dottorato col termine "nocciolo resistente", rimane sostanzialmente integra, mentre, la parte periferica, è formata da materiale incoerente. Le due porzioni sono separate da una superficie di distacco con forma tronco-conica e pendenza delle generatrici dipendente solo dal tipo di materiale (§ 4.1).

Da questa osservazione sperimentale discende immediatamente che la ricerca delle proprietà costitutive del materiale ha senso solo per il nocciolo resistente.

In altre parole, ne segue una considerazione fondamentale per l'altra caratteristica costitutiva di cui ci si era riproposto di riesaminare il processo di identificazione: il modulo di Poisson. Infatti, utilizzando deformazioni radiali/circonfenziali acquisite sulla superficie esterna, si ottengono curve  $\varepsilon_r/\varepsilon_t$  che non sono rappresentative del modulo di Poisson (§ 5.2.4). Le curve effettivamente rappresentative del modulo di Poisson sono quelle ottenute utilizzando deformazioni radiali acquisite all'interno del nocciolo resistente.

Il valore sensibilmente indipendente dal passo di carico del modulo di Poisson ottenuto utilizzando deformazioni radiali acquisite all'interno del nocciolo resistente conferma la natura costitutiva del parametro identificato con il nuovo approccio.

Inoltre, la variazione positiva di volume connessa alle curve volumetriche desunte dai valori di deformazione acquisiti sulla superficie esterna è un effetto apparente dovuto all'apertura delle fessure (§ 5.2.4). Utilizzando i valori di deformazione acquisiti internamente al nocciolo resistente, la curva volumetrica assume valori sempre negativi ed è, con buona approssimazione, lineare fino al carico massimo.

Nel meccanismo di crisi tronco-conico, che, peraltro, non caratterizza solo lo stato ultimo, ma evolve in modo graduale a partire dai primissimi passi di carico, si è voluto vedere una progressiva riduzione di sezione resistente, in analogia al modo di operare per l'identificazione del legame costitutivo dell'acciaio in fase di strizione (§ 2.5).

Nasce quindi la necessità di associare una legge di variazione all'area resistente di un generico solido di calcestruzzo compresso, per un generico

istante del processo di carico. Rispetto a quanto accade nell'acciaio, però, questa associazione non è di immediata valutazione: non si tratta, infatti, di misurare semplicemente l'area minima del nocciolo resistente, ma occorre tener conto anche del contributo del materiale in fase di distacco (§ 2.5).

In maniera del tutto equivalente, e in analogia a quanto fatto in Meccanica del Continuo Danneggiato (§ 2.2.3), si può definire la legge da associare ad un parametro di danno che indichi il complemento a 1 dell'area resistente in percentuale dell'area nominale. A differenza di quanto accade nella Meccanica del Continuo Danneggiato, però, in questo contesto al parametro di danno resta associato un immediato significato fisico, considerata la sua valutazione a partire da un comportamento sperimentale.

L'identificazione del parametro di danno è stata operata mettendo a confronto due parametri di derivazione microsismica, assunti da bibliografia [26, 27 e 28], con un parametro di derivazione energetica, proposto dall'Autrice (§ 4.3). I tre parametri di danno hanno fornito curve del tutto confrontabili tra loro (§ 4.4). Tuttavia, i parametri di danno di derivazione microsismica hanno denunciato un limite di sensibilità (§ 3.1.3), per effetto del disturbo sulla rilevazione microsismica arrecato dal progressivo danneggiamento del materiale, sotto forma di rumore aggiunto. Si è quindi deciso di operare utilizzando il solo parametro di danno energetico, in quanto non affetto da alcuna limitazione.

Questo parametro di danno comprende tutti i fattori di influenza strutturale sul comportamento macroscopico, tra quelli che concorrono a determinare il risultato sperimentale (§ 4.4). Di conseguenza, il parametro di danno è in grado di depurare dal comportamento macroscopico tutti gli effetti strutturali, consentendo di pervenire all'identificazione del comportamento realmente costitutivo.

Per la complementarità esistente tra parametro di danno ed area resistente percentuale, dalla sensibilità del parametro di danno al comportamento strutturale segue immediatamente che, a parità di deformazione longitudinale media, i provini esibiscono una sezione resistente decrescente al crescere della snellezza (§ 4.4).

Definita numericamente la legge di variazione dell'area resistente, la tensione effettiva è stata valutata, in analogia a quanto fatto per l'acciaio ove si voglia rappresentare in maniera più realistica il comportamento in fase post-plastica, come rapporto tra il carico esterno e tale area (§ 5.1 e 5.2.1).

La tensione effettiva così valutata a partire dai dati sperimentali ha portato a legami tensione effettiva/deformazione media di tipo monotono crescente (§ 5.2.2 e 5.2.3).

La monotonicità di questi legami è stata dimostrata, oltre che sperimentalmente, anche analiticamente (§ 5.2.2). Si è infatti mostrato come, in fase di softening strutturale, il gradiente dell'area resistente sia sempre maggiore, in modulo, del gradiente del carico esterno, indipendentemente dalla geometria del solido di prova.

Nota in questo modo la tensione effettiva, per l'identificazione della deformazione effettiva si è fatto ricorso al significato fisico attribuito alla pendenza media dei cicli di scarico – ricarico nel piano tensione media/deformazione media (§ 5.3.1. e 5.3.2). Infatti, nell'ipotesi che la deformazione residua allo scarico sia imputabile ad effetti irreversibili di comportamento strutturale, la pendenza di tali cicli indica il modulo elastico in compressione monoassiale istantaneo  $E_{ist}$ . In base a questa osservazione, la

deformazione effettiva è stata identificata nel piano  $\sigma/\varepsilon$  per intersezione della retta  $\sigma = \sigma_{eff}$  con la retta  $\sigma = E_{ist} \varepsilon$ .

Interpretando i risultati delle prove di carico monoassiale tramite la teoria del nocciolo resistente, è stato possibile identificare un legame costitutivo in monoassiale che, non solo è di tipo monotono crescente, ma risulta anche indipendente dall'effetto dimensionale (§ 5.3.3). L'obiettività del risultato conferma il carattere costitutivo del legame trovato.

Inoltre, resta così dimostrato che, tanto l'effetto softening, quanto l'effetto dimensionale, sono da imputare non a proprietà intrinseche del materiale, ma alla meccanica dei provini in quanto strutture.

**Implementazione dei fondamenti teorici del Metodo delle Celle e validazioni numeriche su applicazioni di Meccanica della Frattura**

La validità del processo di identificazione, tanto del legame costitutivo in monoassiale del calcestruzzo, quanto del modulo di Poisson, è stata verificata per mezzo di una simulazione numerica (Capitolo 7).

La simulazione numerica sviluppata in questa Tesi di Dottorato si avvale del Metodo delle Celle, sviluppato nei suoi aspetti teorici dal Prof. E. Tonti (§ 6.1 e 6.2).

Non essendo questo metodo mai stato implementato per l'analisi di corpi deformabili per effetto dell'applicazione di un campo tensionale, questa Tesi di Dottorato costituisce una delle prime applicazioni del metodo nel campo strutturale. In particolare, si è reso necessario implementare il metodo tenendo conto del meccanismo di enucleazione e propagazione dei quadri fessurativi, nel caso più generale di crack coesivo.

Proprio perché si tratta di una delle prime implementazioni in problemi strutturali, questa fase computazionale si è rivelata particolarmente onerosa. In particolar modo, si è rivelata molto onerosa la fase di messa a punto della soluzione del problema dell'equilibrio in modo misto.

L'implementazione del Metodo delle Celle è stata sviluppata in ambiente Matlab.

Parallelamente all'implementazione del Metodo delle Celle, è stata sviluppata anche un'interfaccia grafica in grado di restituire indicazioni dirette sullo stato di tensione e deformazione dei solidi oggetto di analisi (§ 7.6). Tutte le visualizzazioni grafiche dello stato tenso-deformativo relative alle simulazioni analitiche presentate in questa Tesi di Dottorato (§ 6.3, 6.3.1, 6.3.2, 7.2, 7.3, 7.5, 7.6 e 9.4) sono originate da questa stessa interfaccia grafica.

Il Metodo delle Celle, così come implementato dall'Autrice, è stato testato per mezzo di applicazione ad un caso di Meccanica della Frattura noto in letteratura (§ 6.3).

L'aderenza dei risultati ottenuti con quelli forniti da altre soluzioni numeriche, nella fattispecie, agli elementi finiti (§ 6.3.3), conferma la validità e l'affidabilità del Metodo delle Celle.

**Applicazione del programma implementato come verifica delle proprietà costitutive del calcestruzzo identificate sperimentalmente**

Accertatisi del corretto funzionamento dell'implementazione sviluppata, il Metodo delle Celle è stato applicato al caso dei solidi cilindrici compressi in calcestruzzo (Capitolo 7), come verifica delle assunzioni costitutive dedotte dalla fase di identificazione sperimentale. Nella fattispecie, è stata sviluppata una simulazione numerica in grado di restituire il comportamento strutturale (diagramma carico/spostamento) dei solidi cilindrici in calcestruzzo, a partire dalle caratteristiche costitutive identificate.

In questa simulazione, si è dimostrato determinante il tool messo a punto per la soluzione del problema dell'equilibrio in modo misto. Infatti, il meccanismo di crisi tronco-conico origina una superficie di scorrimento che, per il vincolo offerto dai piatti della pressa, si presenta in alcune zone aperta, e quindi in Modo I, e in alcune zone chiusa con scorrimento relativo, e quindi in Modo II (§ 7.2).

I diagrammi carico/spostamento sono stati ricavati proprio tenendo conto della cinematica della superficie di scorrimento tronco-conica e valutando il decremento di rigidità strutturale che ne consegue.

Ebbene, adottando nella simulazione analitica il modello di unico crack dominante, è stato possibile cogliere numericamente l'andamento macroscopico qualitativo delle prove di compressione su provini cilindrici in calcestruzzo a snellezza variabile (§ 7.7).

Ciò costituisce un'ulteriore e definitiva conferma all'intero processo di identificazione delle proprietà costitutive del calcestruzzo proposto in questa Tesi di Dottorato.

**Fase di sintesi:  
programma  
implementato al  
Metodo delle Celle e  
proprietà costitutive  
del calcestruzzo  
identificate  
sperimentalmente  
per la modellazione  
del comportamento  
macroscopico di  
solidi cilindrici in  
calcestruzzo fasciati  
con materiali  
compositi**

Verificata numericamente la fondatezza fisica delle proprietà costitutive del calcestruzzo identificate sperimentalmente, si è proceduto infine alla modellazione del comportamento del cilindro fasciato in compressione (Capitolo 9).

Il programma di simulazione numerica utilizzato in questa fase è del tutto analogo al precedente, salvo per il fatto che, in questo caso, la risposta macroscopica viene fornita al variare dell'intensità dello stato coattivo rappresentato da un rinforzo esterno in tessuti di materiali composito (FRP) (§ 9.4).

Anche questa simulazione è stata in grado di cogliere numericamente l'andamento macroscopico qualitativo delle prove di compressione (§ 9.5).

In particolare, al variare del numero di strati di rinforzo esterno in tessuti di FRP, è stato possibile ottenere grafici carico/spostamento che passano con continuità dall'andamento softening, caratteristico del comportamento dei solidi di prova non rinforzati, all'andamento monotono crescente, caratteristico, invece, dei solidi cilindrici rinforzati con fibre di carbonio.

Ciò si spiega in base al meccanismo di crisi del calcestruzzo. Ovvero, il decremento di capacità portante che, nel calcestruzzo non rinforzato, consegue alla propagazione del quadro fessurativo dominante viene ostacolato dalla presenza della fasciatura continua esterna in materiali compositi. Infatti, questa fasciatura, ostacolando gli spostamenti in direzione radiale dei solidi cilindrici, costringe la parte periferica di materiale isolata dal crack dominante a collaborare col nocciolo resistente, incrementando, di fatto, l'area resistente del solido di prova al generico passo di carico. È proprio il maggiore valore di area resistente, unitamente alle caratteristiche meccaniche del materiale composito, sono i diretti responsabili delle aumentate capacità di resistenza del solido fasciato. Inoltre, quando lo spessore dello strato di rinforzo è sufficientemente elevato da rendere il gradiente dell'area resistente inferiore ad un determinato valore limite, si osserva la citata transizione dei grafici carico/spostamento dal comportamento softening al comportamento monotono.

La resa grafica della maggiore area resistente che caratterizza il solido fasciato rispetto al solido non fasciato è riportata nel § 9.4.

Rimane quindi confermata la natura sostanzialmente strutturale, e priva di connotazioni costitutive, dell'andamento softening osservato sperimentalmente nei provini in calcestruzzo non rinforzati.

#### **Conclusioni**

Concludendo, in coerenza con gli obiettivi di questa Tesi di Dottorato, si è proposto un processo di identificazione delle caratteristiche costitutive del calcestruzzo che, introdotte in una simulazione numerica al Metodo delle Celle, ha permesso di restituire il comportamento macroscopico dei solidi fasciati con materiali compositi al variare del solo spessore dello strato di rinforzo, senza dover introdurre nessun parametro correttivo da calibrare in funzione della prova oggetto di simulazione.

Per ottenere una maggiore approssimazione al reale andamento quantitativo, si rende comunque necessario raffinare ulteriormente la simulazione numerica per tener conto dell'attivarsi di quadri fessurativi secondari oltre a quello dominante.

La simulazione numerica ha evidenziato la necessità di un'accurata indagine parametrica sulle superfici isolate dal crack, per una modellazione del crack coesivo più aderente alla realtà.

Infine, un altro aspetto che merita di essere approfondito per migliorare l'accuratezza della simulazione numerica è la modellazione delle condizioni di interfaccia macchina/solido di prova.

# INDICE DELLE FIGURE

FIGURA 1.2.1. ELENCO DEI FATTORI CHE DETERMINANO IL RISULTATO SPERIMENTALE $R$ .....	2
FIGURA 1.2.2. PLAUSIBILI SCHEMATIZZAZIONI DELLA RIPARTIZIONE DI $R$ ALL'INIZIO SENZA CICLO DI STABILIZZAZIONE (A'), ALL'INIZIO CON CICLO DI STABILIZZAZIONE (A''), IN FASE INTERMEDIA (B) E ALLA FINE (C) DELLA PROVA MECCANICA..	5
FIGURA 1.2.3. LEGGI COSTITUTIVE IPOTETICHE ( $\sigma_{eff}/\bar{\epsilon}$ ) AL VARIARE DELLA LEGGE DI DECREMENTO DELL' AREA RESISTENTE ( $A_{res}$ ) E LORO CONFRONTO CON LA CURVA DELLA TENSIONE MEDIA ( $\bar{\sigma}/\bar{\epsilon}$ ) E CON IL DIAGRAMMA CARICO/SPOSTAMENTO ( $N/v$ ) .....	6
FIGURA 2.5.1. ASPETTO DEI PROVINI PRIMA DELLA PROVA DI CARICO (A), A PROVA DI CARICO ULTIMATA (B) ED IN SEGUITO ALLA RIMOZIONE DI TUTTO IL MATERIALE DEGRADATO (C) .....	25
FIGURA 2.5.2. CAMPO DI RILEVAZIONE AD OCCHIO NUDO DEL QUADRO FESSURATIVO SUPERFICIALE .....	26
FIGURA 2.5.3. CONFRONTO TRA AREA RESISTENTE ( $A_{res}$ ) E AREA RACCHIUSA DALLA SUPERFICI DI FRATTURA ( $A_{fp}$ ) .....	26
FIGURA 2.5.4. PROVA DI TRAZIONE SU ACCIAIO: VALORI DI TENSIONE CORRISPONDENTI AD AREA RESISTENTE PARI AD AREA NOMINALE (A), AREA RIDOTTA PER EFFETTO POISSON (B) ED AREA RIDOTTA PER EFFETTO POISSON E PER STRIZIONE (C) .....	27
FIGURA 2.5.5. PROVA DI COMPRESSIONE MONOASSIALE SU CALCESTRUZZO: VALORI DI TENSIONE CORRISPONDENTI AD AREA RESISTENTE PARI AD AREA NOMINALE E AD AREA RIDOTTA PER EFFETTO POISSON .....	29
FIGURA 3.1.1.1. CURVA GRANULOMETRICA DELL'AGGREGATO .....	32
FIGURA 3.1.2.1. SCHEMA PROVA DI CARICO .....	33
FIGURA 3.1.2.2. STRUMENTAZIONE DEL CILINDRO TIPO 6 DELLA TERZA SERIE: VISTA ANTERIORE .....	34
FIGURA 3.1.2.3. STRUMENTAZIONE DEL CILINDRO TIPO 6 DELLA TERZA SERIE: VISTA POSTERIORE .....	34
FIGURA 3.1.3.1. DIAGRAMMI SPERIMENTALI CARICO/SPOSTAMENTO PER I DUE PROVINI CILINDRICI ALTI 300 E 200 MM ( $\phi=150$ MM) .....	35
FIGURA 3.1.3.2. DIAGRAMMI SPERIMENTALI VELOCITÀ/SPOSTAMENTO PER I DUE PROVINI CILINDRICI ALTI 300 E 200 MM ( $\phi=150$ MM) .....	35
FIGURA 3.1.3.3. DIAGRAMMI SPERIMENTALI ATTENUAZIONE/SPOSTAMENTO PER I DUE PROVINI ALTI 300 E 200 MM ( $\phi=150$ MM) .....	36
FIGURA 3.1.3.4. CURVE CARICO-ABBASSAMENTO RELATIVE ALLE PROVE DI CARICO SULLA PRIMA SERIE DI PROVINI .....	38
FIGURA 3.1.3.5. CURVE CARICO – ABBASSAMENTO RELATIVE ALLE PROVE DI CARICO SULLA SECONDA SERIE DI PROVINI .....	38
FIGURA 3.1.3.6. CURVE CARICO – ABBASSAMENTO RELATIVE ALLE PROVE DI CARICO SULLA TERZA SERIE DI PROVINI .....	39
FIGURA 3.1.3.7. VARIAZIONE SOTTO CARICO DELLE QUANTITÀ MICROSISMICHE: CILINDRO TIPO 2 DELLA TERZA SERIE .....	40
FIGURA 3.1.3.8. RILEVAZIONI ESTENSIMETRICHE IN DIREZIONE LONGITUDINALE: CILINDRO TIPO 1 DELLA TERZA SERIE .....	41
FIGURA 3.1.3.9. RILEVAZIONI ESTENSIMETRICHE IN DIREZIONE LONGITUDINALE: CILINDRO TIPO 6 DELLA TERZA SERIE .....	41
FIGURA 3.1.3.10. RILEVAZIONI ESTENSIMETRICHE IN DIREZIONE CIRCONFERENZIALE: CILINDRO TIPO 1 DELLA TERZA SERIE .....	42
FIGURA 3.1.3.11. RILEVAZIONI ESTENSIMETRICHE IN DIREZIONE CIRCONFERENZIALE: CILINDRO TIPO 6 DELLA TERZA SERIE .....	42
FIGURA 3.1.3.12. RILEVAZIONI ESTENSIMETRICHE IN DIREZIONE DIAGONALE: CILINDRO TIPO 1 DELLA TERZA SERIE .....	43
FIGURA 3.1.3.13. RILEVAZIONI ESTENSIMETRICHE IN DIREZIONE DIAGONALE: CILINDRO TIPO 6 DELLA TERZA SERIE .....	43
FIGURA 3.1.3.14. CONFRONTO FRA I VALORI DI DEFORMAZIONE ACQUISITI DAI FOS E DALLE ROSETTE ESTENSIMETRICHE "A": CILINDRO TIPO 1 DELLA TERZA SERIE .....	44
FIGURA 3.1.3.15. CONFRONTO FRA I VALORI DI DEFORMAZIONE ACQUISITI DAI FOS E DALLE ROSETTE ESTENSIMETRICHE "A": CILINDRO TIPO 6 DELLA TERZA SERIE .....	44
FIGURA 3.1.3.16. CONFRONTO FRA I VALORI DI DEFORMAZIONE ACQUISITI DAI FOS NEI DUE CILINDRI TIPO 1 E 6 DELLA TERZA SERIE .....	45
FIGURA 3.1.3.17. VARIAZIONE COL CARICO DELLA RESISTIVITÀ NEL CILINDRO TIPO 6 DELLA TERZA SERIE .....	46
FIGURA 3.2.2.1. PROVA DI COMPRESSIONE SU CILINDRI .....	50



FIGURA 3.2.3.1. RELAZIONE TRA RESISTENZA A COMPRESSIONE, $R_C$ , E RAPPORTO TRA ACQUA, A, E LEGANTI (CEMENTO E FUMI DI SILICE), $C+SF$ .....	50
FIGURA 3.2.3.2. SVILUPPO NEL TEMPO DELLE RESISTENZE A COMPRESSIONE.....	51
FIGURA 3.2.3.3. RELAZIONE TRA RESISTENZA A COMPRESSIONE $R_C$ E VELOCITÀ DELLE ONDE VIBRAZIONALI $V_f$ .....	52
FIGURA 3.2.3.4. RELAZIONE TRA RESISTENZA A COMPRESSIONE $R_C$ E INDICE DI RIMBALZO $I_r$ .....	52
FIGURA 3.2.3.5. RELAZIONE TRA RESISTENZA A COMPRESSIONE $R_C$ E RESISTENZA STIMATA COL METODO SONREB $R_s$ .....	53
FIGURA 3.2.3.6. RELAZIONE TRA $C$ E RESISTENZA STIMATA COL METODO SONREB $R_s$ .....	53
FIGURA 3.2.3.7. PROVA DI PULLOUT: RELAZIONE TRA RESISTENZA A COMPRESSIONE $R_C$ E PRESSIONE DI ESTRAZIONE.....	54
FIGURA 3.2.3.8. WINDSOR PROBE SYSTEM: RELAZIONE TRA RESISTENZA A COMPRESSIONE $R_C$ E LUNGHEZZA DI PENETRAZIONE.....	54
FIGURA 3.2.3.9. MICROCAROTE D=28MM.....	55
FIGURA 3.2.3.10. MICROCAROTE D=50 MM.....	55
FIGURA 3.2.3.11. DIAGRAMMI CARICO – ABBASSAMENTO PER I PROVINI B1, C1, C2, D1, D2, E1 E E2.....	58
FIGURA 3.2.3.12. DIAGRAMMI CARICO – ABBASSAMENTO PER I PROVINI G1, G2, H1, H2, I1, I2, L1 E L2.....	58
FIGURA 3.2.3.13. RELAZIONE TRA VELOCITÀ DELLE ONDE VIBRAZIONALI E ABBASSAMENTO PER IL PROVINO D2.....	59
FIGURA 3.2.3.14. RELAZIONE TRA VELOCITÀ DELLE ONDE VIBRAZIONALI E ABBASSAMENTO PER IL PROVINO L1.....	59
FIGURA 3.3.1 VISTA IN SEZIONE DELLE CASSEFORME UTILIZZATE.....	79
FIGURA 3.3.2. PARTICOLARE DEL FORO DI FUORIUSCITA DELLA FIBRA OTTICA NEL CILINDRO TIPO 1.....	80
FIGURA 3.3.3. FISSAGGIO DEL CAVO PROTETTIVO DELLA FIBRA OTTICA AL SUPPORTO ESTERNO.....	81
FIGURA 3.3.4. PARTICOLARE DEL SUPPORTO ESTERNO A FISSAGGIO ULTIMATO.....	81
FIGURA 3.3.5. COSTIPAMENTO DEL CALCESTRUZZO CON SONDA VIBRANTE.....	82
FIGURA 4.1.1. CILINDRO TIPO 1 DELLA TERZA SERIE PRIMA DELLA PROVA DI CARICO.....	84
FIGURA 4.1.2. CILINDRO TIPO 1 DELLA TERZA SERIE A PROVA DI CARICO ULTIMATA.....	84
FIGURA 4.1.3. CILINDRO TIPO 1 DELLA TERZA SERIE DOPO L'ELIMINAZIONE DEL MATERIALE DEGRADATO.....	84
FIGURA 4.1.4. CILINDRO TIPO 2 DELLA SECONDA SERIE DOPO L'ELIMINAZIONE DEL MATERIALE DEGRADATO.....	84
FIGURA 4.1.5. CILINDRO TIPO 5 DELLA PRIMA SERIE DOPO L'ELIMINAZIONE DEL MATERIALE DEGRADATO.....	84
FIGURA 4.1.6. CILINDRO TIPO 5 DELLA TERZA SERIE DOPO L'ELIMINAZIONE DEL MATERIALE DEGRADATO.....	84
FIGURA 4.2.1. CURVE CARICO/DEFORMAZIONE RADIALE PER I CILINDRI TIPO 1 E 6: VALORI DI DEFORMAZIONE RADIALE ACQUISITI INTERNAMENTE AL NOCCIOLO RESISTENTE PER MEZZO DI FOS.....	85
FIGURA 4.2.2. CONFRONTO FRA I VALORI DI DEFORMAZIONE RADIALE ACQUISITI INTERNAMENTE AL NOCCIOLO RESISTENTE E SULLA SUPERFICIE ESTERNA: CILINDRO TIPO 1.....	86
FIGURA 4.2.3. CONFRONTO FRA I VALORI DI DEFORMAZIONE RADIALE ACQUISITI INTERNAMENTE AL NOCCIOLO RESISTENTE E SULLA SUPERFICIE ESTERNA: CILINDRO TIPO 6.....	86
FIGURA 4.2.4. CURVE CARICO/DEFORMAZIONE RADIALE PER I CILINDRI TIPO 1 E 6: VALORI DI DEFORMAZIONE RADIALE ACQUISITI SULLA SUPERFICIE ESTERNA PER MEZZO DI ROSETTE ESTENSIMETRICHE.....	87
FIGURA 4.3.1. VALUTAZIONE DELL'ENERGIA DISSIPATA $E_{diss}$ .....	88
FIGURA 4.3.2. PARAMETRI UTILIZZATI PER LA VALUTAZIONE DEL DANNO INIZIALE $D_0$ .....	89
FIGURA 4.4.1. CONFRONTO, A PARITÀ DI SPOSTAMENTO RELATIVO, TRA LE LEGGI DI DECREMENTO DELL'AREA RESISTENTE PERCENTUALE ED IL DIAGRAMMA CARICO/SPOSTAMENTO PER IL PROVINO CILINDRICO ALTO 300 MM ( $\phi=150$ MM).....	91
FIGURA 4.4.2. CONFRONTO, A PARITÀ DI SPOSTAMENTO RELATIVO, TRA LE LEGGI DI DECREMENTO DELL'AREA RESISTENTE PERCENTUALE ED IL DIAGRAMMA CARICO/SPOSTAMENTO PER IL PROVINO CILINDRICO ALTO 200 MM ( $\phi=150$ MM).....	91
FIGURA 4.4.3. CONFRONTO TRA LE LEGGI DI DECREMENTO DELL'AREA RESISTENTE DOVUTE ALLA SOLA AZIONE DEL CARICO ESTERNO (VARIABILE DI DANNO: VARIAZIONE PERCENTUALE DELL'ENERGIA DISSIPATA).....	92
FIGURA 4.4.4. CONFRONTO TRA LE LEGGI DI DECREMENTO DELL'AREA RESISTENTE DOVUTE SIA ALL'AZIONE DEL CARICO ESTERNO, SIA AL DANNO INIZIALE (VARIABILE DI DANNO: VARIAZIONE PERCENTUALE DELL'ENERGIA DISSIPATA).....	93
FIGURA 4.4.5. DECREMENTO PERCENTUALE STIMATO DI AREA RESISTENTE: CILINDRO TIPO 2 DELLA TERZA SERIE.....	94

FIGURA 4.4.6. CURVE DEL DECREMENTO DI AREA RESISTENTE PERCENTUALE RELATIVE ALLE PROVE DI CARICO SULLA PRIMA SERIE DI PROVINI. ....	95
FIGURA 4.4.7. CURVE DEL DECREMENTO DI AREA RESISTENTE PERCENTUALE RELATIVE ALLE PROVE DI CARICO SULLA SECONDA SERIE DI PROVINI. ....	95
FIGURA 4.4.8. CURVE DEL DECREMENTO DI AREA RESISTENTE PERCENTUALE RELATIVE ALLE PROVE DI CARICO SULLA TERZA SERIE DI PROVINI. ....	96
FIGURA 4.5.1. DECREMENTO PERCENTUALE STIMATO DI AREA RESISTENTE: CILINDRO AD ALTE PRESTAZIONI L1. ....	97
FIGURA 5.2.2.1. INFLUENZA DELL'EFFETTO VISCOSITÀ PER IL PROVINO ALTO 200 MM ( $\phi=150$ MM). ....	105
FIGURA 5.2.2.2. INCIDENZA SULLA DEDUZIONE DELLA TENSIONE EFFETTIVA DAI DATI SPERIMENTALI DELLE SINGOLE QUOTE DI DANNO E DELL'EFFETTO VISCOSITÀ (PROVINO ALTO 200 MM, $\phi=150$ MM). ....	106
FIGURA 5.2.2.3. LEGAMI TEORICI OTTENUTI CONSIDERANDO L'EFFETTO SULLA DECURTAZIONE DELL'AREA RESISTENTE DELLE SOLE QUOTE DI DANNO ( $\phi=150$ MM). ....	107
FIGURA 5.2.2.4. LEGAMI TEORICI OTTENUTI CONSIDERANDO L'EFFETTO, SULLA DECURTAZIONE DELL'AREA RESISTENTE, SIA DELLE QUOTE DI DANNO, SIA DELLA VISCOSITÀ ( $\phi=150$ MM). ....	108
FIGURA 5.2.2.5. IDENTIFICAZIONE DEL LEGAME TENSIONE EFFETTIVA/DEFORMAZIONE MEDIA E CONFRONTO COL LEGAME COSTITUTIVO DI DERIVAZIONE CLASSICA: CILINDRO TIPO 2 DELLA TERZA SERIE. ....	109
FIGURA 5.2.2.6. DECREMENTO DELLA PENDENZA MEDIA DEI CICLI DI SCARICO – RICARICO IN FUNZIONE DELL'ABBASSAMENTO: CILINDRO TIPO 1 DELLA TERZA SERIE. ....	110
FIGURA 5.2.2.7. CONFRONTO TRA LE CURVE DEL DECREMENTO DI AREA RESISTENTE PERCENTUALE DERIVATE DAL PARAMETRO DI DANNO ENERGETICO, NEI DUE CASI DI PENDENZA MEDIA COSTANTE E PENDENZA MEDIA VARIABILE DEL RAMO DI SCARICO – RICARICO. ....	110
FIGURA 5.2.2.8. CONFRONTO TRA LE CURVE TEORICHE DERIVATE DAL PARAMETRO DI DANNO ENERGETICO, NEI DUE CASI DI PENDENZA MEDIA COSTANTE E PENDENZA MEDIA VARIABILE DEL RAMO DI SCARICO – RICARICO. ....	111
FIGURA 5.2.2.9. IDENTIFICAZIONE DELLA CURVA MEDIA TENSIONE EFFETTIVA/DEFORMAZIONE MEDIA AL VARIARE DELLA GEOMETRIA DEI PROVINI, CON RELATIVO CAMPO DI DISPERSIONE DI RISULTATI. ....	111
FIGURA 5.2.3.1. PROVINO AD ALTE PRESTAZIONI L1: CONFRONTO FRA LA CURVA TENSIONE MEDIA/DEFORMAZIONE MEDIA ( $\bar{\sigma}/\bar{\varepsilon}$ ), DI DERIVAZIONE CLASSICA, E LE CURVE TENSIONE EFFETTIVA/DEFORMAZIONE MEDIA ( $\sigma_{eff}/\bar{\varepsilon}$ ) OTTENUTE PER I DUE PARAMETRI DI DANNO. ....	112
FIGURA 5.2.3.2. DIAGRAMMI $\sigma_{eff}/\bar{\varepsilon}$ PER I PROVINI CILINDRICI TESTATI A 3 GIORNI DI MATURAZIONE. ....	113
FIGURA 5.2.3.3. DIAGRAMMI $\sigma_{eff}/\bar{\varepsilon}$ PER I PROVINI CILINDRICI TESTATI A 28 GIORNI DI MATURAZIONE. ....	114
FIGURA 5.2.4.1. CURVE $\varepsilon_r/\varepsilon_t$ PER IL CILINDRO TIPO 1 DELLA TERZA SERIE. ....	115
FIGURA 5.2.4.2. CURVE $\varepsilon_r/\varepsilon_t$ PER IL CILINDRO TIPO 6 DELLA TERZA SERIE. ....	116
FIGURA 5.2.4.3. CURVE VOLUMETRICHE PER IL CILINDRO TIPO 1 DELLA TERZA SERIE. ....	117
FIGURA 5.2.4.4. CURVE VOLUMETRICHE PER IL CILINDRO TIPO 6 DELLA TERZA SERIE. ....	117
FIGURA 5.3.1.1. SCHEMA ESEMPLIFICATIVO DELL'IDENTIFICAZIONE DELLA TENSIONE EFFETTIVA $\sigma_{eff}$ , A PARTIRE DAL VALORE NOTO DELLA TENSIONE MEDIA $\bar{\sigma}$ . ....	119
FIGURA 5.3.1.2. SCHEMA ESEMPLIFICATIVO DELL'IDENTIFICAZIONE DELLA DEFORMAZIONE EFFETTIVA $\varepsilon_{eff}$ , A PARTIRE DAI VALORI NOTI DELLA TENSIONE EFFETTIVA $\sigma_{eff}$ E DEL MODULO ELASTICO AL GENERICO PASSO DI CARICO. ....	120
FIGURA 5.3.2.1. DIAGRAMMA CARICO/ABBASSAMENTO PER IL CILINDRO TIPO 4 DELLA TERZA SERIE. ....	121
FIGURA 5.3.2.2. PENDENZE MEDIE DEI CICLI DI SCARICO – RICARICO RELATIVE AI TRE CICLI EFFETTUATI PER I PROVINI DELLA TERZA SERIE. ....	122
FIGURA 5.3.2.3. PUNTI ASSUNTI COME BASE DI INTERPOLAZIONE E CURVA INTERPOLANTE. ....	123
FIGURA 5.3.3.1. DIPENDENZA DEI DIAGRAMMI $\sigma_{eff}/\bar{\varepsilon}$ DAL VALORE DELLA COSTANTE CORRETTIVA DELL'ENERGIA DISSIPATA TOTALE. ....	124
FIGURA 5.3.3.2. DIPENDENZA DEI DIAGRAMMI $\sigma_{eff}/\varepsilon_{eff}$ DAL VALORE DELLA COSTANTE CORRETTIVA DELL'ENERGIA DISSIPATA TOTALE. ....	124
FIGURA 5.3.3.3. CURVE MEDIE $\sigma_{eff}/\varepsilon_{eff}$ PER OGNI GEOMETRIA. ....	126

FIGURA 5.3.3.4. MEDIA DELLE CURVE $\sigma_{eff}/\varepsilon_{eff}$ RELATIVE ALLE SINGOLE GEOMETRIE, CON RELATIVO FUSO DI DISPERSIONE DEI RISULTATI. ....	126
FIGURA 6.1.1. CONFRONTO TRA METODO DELLE CELLE E METODI SOLUTIVI TRADIZIONALI. ....	129
FIGURA 6.1.2. APPROSSIMAZIONE DEL CAMPO DEGLI SPOSTAMENTI CON UN CAMPO AFFINE, A PARTIRE DAL VALORE ASSUNTO DAL CAMPO EFFETTIVO IN CORRISPONDENZA DEI VERTICI DELLE CELLE. ....	131
FIGURA 6.1.3. CORRISPONDENZE TRA GLI ELEMENTI GEOMETRICI DEL COMPLESSO PRIMALE E QUELLI DEL COMPLESSO DUALE. ....	132
FIGURA 6.1.4. CORRISPONDENZE GEOMETRICHE FRA LE DUE MESH DI UN DOMINIO PIANO, IN DIREZIONE ORTOGONALE AL PIANO STESSO. ....	133
FIGURA 6.2.1.1. COMPLESSO DI CELLE DI DELAUNAY – VORONOI CON ASSOCIAZIONE DEGLI ELEMENTI GEOMETRICI ALLE VARIABILI DI SORGENTE E DI CONFIGURAZIONE. ....	137
FIGURA 6.2.1.2. PROPRIETÀ DELLO STATO DI SFORZO. ....	139
FIGURA 6.2.1.3. VARIABILI E PARAMETRI USATI IN FORMULAZIONE DISCRETA. ....	141
FIGURA 6.2.1.4. CONFRONTO TRA IL METODO DELLE CELLE (SINISTRA) E IL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI (DESTRA). ...	142
FIGURA 6.2.2.1. DISCRETIZZAZIONE PER INTERPOLAZIONE QUADRATICA: CELLA PRIMALE IN TRATTO SOTTILE, CELLA DUALE IN TRATTO SPESSO. ....	143
FIGURA 6.2.2.2. DISCRETIZZAZIONE DI UN DOMINIO PIANO: CELLA PRIMALE IN TRATTO SOTTILE, CELLA DUALE IN TRATTO SPESSO. ....	143
FIGURA 6.2.2.3. POSIZIONE DEI NODI. ....	144
FIGURA 6.2.2.4. COORDINATE AREALI DI UN PUNTO $P$ . ....	144
FIGURA 6.2.2.5. FORZA SCAMBIATA ATTRAVERSO UN LATO DEL POLIGONO DUALE. ....	146
FIGURA 6.2.2.6. VETTORE AREA DI UN LATO DEL POLIGONO DUALE. ....	146
FIGURA 6.2.2.7. MESH DUALE. ....	147
FIGURA 6.2.2.8. FORZE SUI LATI DEI POLIGONI DUALI INTERNI AD UNA CELLA. ....	147
FIGURA 6.2.2.9. POLIGONO DI INFLUENZA DEL NODO $H$ . ....	148
FIGURA 6.2.2.10. CELLA SUL CONTOURNO. ....	148
FIGURA 6.3.1. SCHEMA STATICO DEL CONCIO STATICAMENTE EQUIVALENTE. ....	149
FIGURA 6.3.1.1. DISCRETIZZAZIONE SPAZIALE DELLA TRAVE E DEL CONCIO STATICAMENTE EQUIVALENTE ( $p/h = 0.5$ ). ....	150
FIGURA 6.3.1.2. MAPPATURA DELLO STATO TENSIONALE LUNGO L'ASSE DELLA TRAVE ( $\sigma_x$ ) IN ASSENZA DI CRACK. ....	150
FIGURA 6.3.1.3. MAPPATURA DELLO STATO TENSIONALE LUNGO L'ASSE DELLA TRAVE ( $\sigma_x$ ) PER $p/h = 0.9$ . ....	150
FIGURA 6.3.1.4. MAPPATURA DELLO STATO TENSIONALE LUNGO L'ASSE DELLA TRAVE ( $\sigma_x$ ) PER $p/h = 0.5$ . ....	151
FIGURA 6.3.1.5. RAPPRESENTAZIONE TRIDIMENSIONALE, ANALISI DISCRETA PER SEZIONI DI CONTROLLO E MAPPATURA CROMATICA DELLO STATO TENSIONALE LUNGO L'ASSE DELLA TRAVE PER $p/h = 0$ . ....	152
FIGURA 6.3.1.6. RAPPRESENTAZIONE TRIDIMENSIONALE, ANALISI DISCRETA PER SEZIONI DI CONTROLLO E MAPPATURA CROMATICA DELLO STATO TENSIONALE LUNGO L'ASSE DELLA TRAVE PER $p/h = 0.05$ . ....	152
FIGURA 6.3.1.7. RAPPRESENTAZIONE TRIDIMENSIONALE, ANALISI DISCRETA PER SEZIONI DI CONTROLLO E MAPPATURA CROMATICA DELLO STATO TENSIONALE LUNGO L'ASSE DELLA TRAVE PER $p/h = 0.1$ . ....	153
FIGURA 6.3.1.8. RAPPRESENTAZIONE TRIDIMENSIONALE, ANALISI DISCRETA PER SEZIONI DI CONTROLLO E MAPPATURA CROMATICA DELLO STATO TENSIONALE LUNGO L'ASSE DELLA TRAVE PER $p/h = 0.15$ . ....	153
FIGURA 6.3.1.9. RAPPRESENTAZIONE TRIDIMENSIONALE, ANALISI DISCRETA PER SEZIONI DI CONTROLLO E MAPPATURA CROMATICA DELLO STATO TENSIONALE LUNGO L'ASSE DELLA TRAVE PER $p/h = 0.2$ . ....	154
FIGURA 6.3.1.10. RAPPRESENTAZIONE TRIDIMENSIONALE, ANALISI DISCRETA PER SEZIONI DI CONTROLLO E MAPPATURA CROMATICA DELLO STATO TENSIONALE LUNGO L'ASSE DELLA TRAVE PER $p/h = 0.25$ . ....	154
FIGURA 6.3.1.11. RAPPRESENTAZIONE TRIDIMENSIONALE, ANALISI DISCRETA PER SEZIONI DI CONTROLLO E MAPPATURA CROMATICA DELLO STATO TENSIONALE LUNGO L'ASSE DELLA TRAVE PER $p/h = 0.3$ . ....	155
FIGURA 6.3.1.12. RAPPRESENTAZIONE TRIDIMENSIONALE, ANALISI DISCRETA PER SEZIONI DI CONTROLLO E MAPPATURA CROMATICA DELLO STATO TENSIONALE LUNGO L'ASSE DELLA TRAVE PER $p/h = 0.35$ . ....	155

FIGURA 6.3.1.13. RAPPRESENTAZIONE TRIDIMENSIONALE, ANALISI DISCRETA PER SEZIONI DI CONTROLLO E MAPPATURA CROMATICA DELLO STATO TENSIONALE LUNGO L'ASSE DELLA TRAVE PER $p/h = 0.4$ .....	156
FIGURA 6.3.1.14. RAPPRESENTAZIONE TRIDIMENSIONALE, ANALISI DISCRETA PER SEZIONI DI CONTROLLO E MAPPATURA CROMATICA DELLO STATO TENSIONALE LUNGO L'ASSE DELLA TRAVE PER $p/h = 0.45$ .....	156
FIGURA 6.3.1.15. RAPPRESENTAZIONE TRIDIMENSIONALE, ANALISI DISCRETA PER SEZIONI DI CONTROLLO E MAPPATURA CROMATICA DELLO STATO TENSIONALE LUNGO L'ASSE DELLA TRAVE PER $p/h = 0.5$ .....	157
FIGURA 6.3.1.16. RAPPRESENTAZIONE TRIDIMENSIONALE, ANALISI DISCRETA PER SEZIONI DI CONTROLLO E MAPPATURA CROMATICA DELLO STATO TENSIONALE LUNGO L'ASSE DELLA TRAVE PER $p/h = 0.55$ .....	157
FIGURA 6.3.1.17. RAPPRESENTAZIONE TRIDIMENSIONALE, ANALISI DISCRETA PER SEZIONI DI CONTROLLO E MAPPATURA CROMATICA DELLO STATO TENSIONALE LUNGO L'ASSE DELLA TRAVE PER $p/h = 0.6$ .....	158
FIGURA 6.3.1.18. RAPPRESENTAZIONE TRIDIMENSIONALE, ANALISI DISCRETA PER SEZIONI DI CONTROLLO E MAPPATURA CROMATICA DELLO STATO TENSIONALE LUNGO L'ASSE DELLA TRAVE PER $p/h = 0.65$ .....	158
FIGURA 6.3.1.19. RAPPRESENTAZIONE TRIDIMENSIONALE, ANALISI DISCRETA PER SEZIONI DI CONTROLLO E MAPPATURA CROMATICA DELLO STATO TENSIONALE LUNGO L'ASSE DELLA TRAVE PER $p/h = 0.7$ .....	159
FIGURA 6.3.1.20. DIREZIONI PRINCIPALI DI TENSIONE PER $p/h = 0.9$ .....	159
FIGURA 6.3.1.21. MAPPATURA DEGLI SCORRIMENTI ANGOLARI NEL PIANO MEDIO DELLA TRAVE ( $\gamma_{xy}$ ) PER $p/h = 0.5$ .....	160
FIGURA 6.3.1.22. MAPPATURA DEGLI SCORRIMENTI ANGOLARI NEL PIANO MEDIO DELLA TRAVE ( $\gamma_{xy}$ ) PER $p = 0$ .....	160
FIGURA 6.3.1.23. DEFORMATA DEL CONCIO STATICAMENTE E CINEMATICAMENTE EQUIVALENTE. ....	160
FIGURA 6.3.2.1. INFLUENZA DI $p/h$ SUI VALORI DI MOMENTO FLETTENTE E ROTAZIONE, A PARITÀ DI SPOSTAMENTO IMPOSTO. ....	161
FIGURA 6.3.2.2. A) SENSIBILITÀ DEL MODELLO NUMERICO ALL'EFFETTO PUNZONAMENTO; B) SCHEMA STATICO E POSIZIONE DEI PUNTI DI RISCONTRO; C) MAPPATURA DELLE $\sigma_y$ PER $p/h = 0.5$ .....	162
FIGURA 6.3.3.1. RISULTATI NUMERICI PER C E G, IN FUNZIONE DI $p/h$ .....	163
FIGURA 6.3.3.2. CONFRONTO FRA I VALORI NUMERICI DI $K_I$ ED I VALORI RIPORTATI IN BROWN (1966) E TADA (1973). ....	164
FIGURA 7.1.1. GENERICA SEZIONE LONGITUDINALE DEL SOLIDO DI PROVA.....	165
FIGURA 7.2.1. ESEMPLIFICAZIONE DELLE DUE ZONE A DIVERSE CONDIZIONI DI VINCOLO IN CUI È SUDDIVISO IL CRACK. ....	166
FIGURA 7.3.1.1. DEFORMATA DI FASE 1. ....	166
FIGURA 7.3.2.1. FLOW CHART DELLA FASE 2. ....	168
FIGURA 7.3.3.1. ESEMPIO DI IPOTESI DI VINCOLO PERFETTO CORRETTA (REAZIONE $R_1$ INTERNA AL CONO D'ATTRITO) E DI IPOTESI DI VINCOLO PERFETTO NON CORRETTA (REAZIONE $R_2$ ESTERNA AL CONO D'ATTRITO). ....	169
FIGURA 7.3.3.2. FLOW CHART DELLA FASE 3 PER L'IDENTIFICAZIONE DELLE CONDIZIONI DI VINCOLO SUL CRACK ALLA PRIMA ITERAZIONE. ....	170
FIGURA 7.5.1. SCHEMA DEL NOCCIOLO ESAGONALE (IN VERDE) E GENERAZIONE AUTOMATICA DELLE MESH DI DELAUNAY (IN ROSSO) E VORONOI (IN BLU); LA CELLA DI VORONOI UTILIZZATA PER IL CALCOLO DELLO STATO TENSIONALE NELL'INTORNO DEL TIP È STATA EVIDENZIATA CON RETINATURA IN BLU.....	172
FIGURA 7.5.3. FLOW CHART CORRISPONDENTE ALLA COSTRUZIONE DELLA SUPERFICIE DI CRISI PER ROTAZIONE COMPLETA DEL NOCCIOLO. ....	174
FIGURA 7.5.4. A) PRIMA CONFIGURAZIONE DEL NOCCIOLO PER LA VALUTAZIONE DEL CIRCOLO DI MOHR; B) SECONDA CONFIGURAZIONE DEL NOCCIOLO PER LA VALUTAZIONE DEL CIRCOLO DI MOHR; C) CIRCOLO DI MOHR IDENTIFICATO IN UN CASO DI RAGGIUNTA CONDIZIONE DI CRISI: IL PUNTO $\triangleleft$ INDICA IL POLO DI MOHR, MENTRE IL PUNTO $\_$ INDICA IL PUNTO DI TANGENZA TRA IL CIRCOLO E LA SUPERFICIE LIMITE. ....	175

FIGURA 7.6.1. DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI IN DIREZIONE ASSIALE ( $\sigma_y$ ) TRAMITE MAPPATURA POLICROMATICA DISCRETA.....	177
FIGURA 7.6.2. DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI IN DIREZIONE ORTOGONALE ALL'ASSE ( $\sigma_x$ ) TRAMITE MAPPATURA POLICROMATICA DISCRETA.....	178
FIGURA 7.6.3. DISTRIBUZIONE DEGLI SCORRIMENTI ANGOLARI ( $\gamma_{xy}$ ) TRAMITE MAPPATURA POLICROMATICA DISCRETA.....	178
FIGURA 7.6.4. DIREZIONI PRINCIPALI DI TENSIONE.....	179
FIGURA 7.6.5. DISCRETIZZAZIONE SPAZIALE DI DELAUNAY-VORONOI, IN SEGUITO ALL'INSERIMENTO DEL NOCCIOLO PER IL CALCOLO DEL CIRCOLO DI MOHR NELL'INTORNO FINITO DEL TIP.....	179
FIGURA 7.7.1. CILINDRO TIPO 1 DEL SECONDO PROGRAMMA SPERIMENTALE SU CALCESTRUZZI NORMALI: CONFRONTO TRA LE CURVE SPERIMENTALI E LA CURVA ANALITICA.....	180
FIGURA 7.7.2. CILINDRO TIPO 2 DEL SECONDO PROGRAMMA SPERIMENTALE SU CALCESTRUZZI NORMALI: CONFRONTO TRA LE CURVE SPERIMENTALI E LA CURVA ANALITICA.....	181
FIGURA 7.7.3. CILINDRO TIPO 3 DEL SECONDO PROGRAMMA SPERIMENTALE SU CALCESTRUZZI NORMALI: CONFRONTO TRA LE CURVE SPERIMENTALI E LA CURVA ANALITICA.....	181
FIGURA 7.7.4. CILINDRO TIPO 4 DEL SECONDO PROGRAMMA SPERIMENTALE SU CALCESTRUZZI NORMALI: CONFRONTO TRA LE CURVE SPERIMENTALI E LA CURVA ANALITICA.....	182
FIGURA 7.7.5. CILINDRO TIPO 5 DEL SECONDO PROGRAMMA SPERIMENTALE SU CALCESTRUZZI NORMALI: CONFRONTO TRA LE CURVE SPERIMENTALI E LA CURVA ANALITICA.....	182
FIGURA 7.7.6. CILINDRO L1 DEL PROGRAMMA SPERIMENTALE SU CALCESTRUZZI AD ALTE PRESTAZIONI: CONFRONTO TRA LA CURVA SPERIMENTALE E LA CURVA ANALITICA.....	183
FIGURA 7.8.1. CURVE CARICO-SPOSTAMENTO ANALITICHE PER LE 6 GEOMETRIE DEL SECONDO PROGRAMMA SPERIMENTALE SU CALCESTRUZZI NORMALI.....	184
FIGURA 8.4.1. PARTICOLARE DELLA SEZIONE TRASVERSALE DI UN TESSUTO MONODIREZIONALE DI FRP IN FIBRE DI CARBONIO.....	192
FIGURA 8.4.2. PROCEDURA DI APPLICAZIONE DEI TESSUTI IN FRP SU ELEMENTI STRUTTURALI IN CEMENTO ARMATO.....	194
FIGURA 8.5.1. LEGAME TENSIONE LONGITUDINALE DI TRAZIONE/DEFORMAZIONE.....	194
FIGURA 8.5.2. LEGAME TENSIONE LONGITUDINALE DI COMPRESSIONE/DEFORMAZIONE.....	194
FIGURA 8.5.3. LEGAME SFORZO DI TAGLIO/DEFORMAZIONE.....	194
FIGURA 8.5.4. LEGAME TENSIONE TRASVERSALE/DEFORMAZIONE PER STATI DI TRAZIONE.....	194
FIGURA 8.5.5. LEGAME TENSIONE TRASVERSALE/DEFORMAZIONE PER STATI DI COMPRESSIONE.....	194
FIGURA 8.5.6. LEGAME TENSIONE LONGITUDINALE/DEFORMAZIONE.....	194
FIGURA 9.1.1. LEGAME QUALITATIVO TENSIONE NOMINALE/DEFORMAZIONE MEDIA PER CALCESTRUZZI NON ARMATI, ARMATI CON STAFFATURA IN ACCIAIO E ARMATI CON FASCIATURA ESTERNA IN MATERIALE COMPOSITO.....	197
FIGURA 9.2.1.1. FUSI DI DISPERSIONE DEI DIAGRAMMI TENSIONE NOMINALE/DEFORMAZIONE MEDIA PER CILINDRI RINFORZATI E NON RINFORZATI.....	200
FIGURA 9.2.2.1. INVILUPPI DEI RISULTATI SPERIMENTALI OTTENUTI SULLE COLONNE NON RINFORZATE.....	202
FIGURA 9.2.3.1. INVILUPPI DELLA DEFORMAZIONE VOLUMETRICA PER I CILINDRI SAGGIATI, DEFORMAZIONI VOLUMETRICHE DI VOLUME POSITIVE SIGNIFICANO DIMINUZIONI DI VOLUME.....	203
FIGURA 9.2.3.2. INVILUPPI DELLA DEFORMAZIONE VOLUMETRICA PER LE COLONNE SAGGIATE, DEFORMAZIONI VOLUMETRICHE DI VOLUME POSITIVE SIGNIFICANO DIMINUZIONI DI VOLUME.....	204
FIGURA 9.3.1. CURVE VOLUMETRICHE RELATIVE A PROVINI NON RINFORZATI E A PROVINI RINFORZATI: PER CONVENZIONE, I VALORI DI DEFORMAZIONE VOLUMETRICA RIPORTATI SUL SEMIASSE POSITIVO DELLE X SONO QUELLI NEGATIVI.....	205

FIGURA 9.3.2. CURVE VOLUMETRICHE RELATIVE A PROVINI NON RINFORZATI E A PROVINI RINFORZATI: PER CONVENZIONE, I VALORI DI DEFORMAZIONE VOLUMETRICA RIPORTATI SUL SEMIASSE POSITIVO DELLE X SONO QUELLI NEGATIVI. ....	206
FIGURA 9.3.3. LEGAME COSTITUTIVO ADOTTATO PER L'INTERFACCIA CALCESTRUZZO – STRATO DI RINFORZO.....	206
FIGURA 9.4.1. SCHEMA STATICO DI UNA STRISCIA UNITARIA DI TESSUTO IN FRP SOLIDALE ALLA GENERICA SEZIONE TRASVERSALE DEL CILINDRO.....	208
FIGURA 9.4.2. DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI IN DIREZIONE ASSIALE ( $\sigma_y$ ) SENZA FRP. ....	209
FIGURA 9.4.3. DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI IN DIREZIONE ASSIALE ( $\sigma_y$ ) CON FRP. ....	209
FIGURA 9.4.4. DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI IN DIREZIONE ORTOGONALE ALL'ASSE ( $\sigma_x$ ) SENZA FRP.....	210
FIGURA 9.4.5. DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI IN DIREZIONE ORTOGONALE ALL'ASSE ( $\sigma_x$ ) CON FRP.....	211
FIGURA 9.5.1. INCIDENZA DEL PARAMETRO $sp_{max}$ SULLA FORMA DELLA CURVA VOLUMETRICA ANALITICA (CON $H$ SI È INDICATO L'ALTEZZA DEL PROVINO CILINDRICO).....	212
FIGURA 9.5.2. CURVE VOLUMETRICHE ANALITICHE CON E SENZA FASCIATURA IN TESSUTO DI FIBRA DI CARBONIO. ....	213
FIGURA 9.5.3. CURVE CARICO - SPOSTAMENTO ANALITICHE CON E SENZA FASCIATURA IN TESSUTO DI FIBRA DI CARBONIO. ....	213
FIGURA 9.5.4. CONFRONTO TRA LA CURVA SPERIMENTALE E LA CURVA ANALITICA PER IL PROVINO NON RINFORZATO. ....	214
FIGURA 9.5.5. CONFRONTO TRA LA CURVA SPERIMENTALE E LA CURVA ANALITICA PER IL PROVINO RINFORZATO CON 1 STRATO DI FRP. ....	215
FIGURA 9.5.6. CONFRONTO TRA LA CURVA SPERIMENTALE E LA CURVA ANALITICA PER IL PROVINO RINFORZATO CON 3 STRATI DI FRP.....	215



## INDICE DELLE TABELLE

TABELLA 3.1.1.1. QUANTITÀ DEI COMPONENTI IMPIEGATI PER MC E PER OGNI SINGOLO IMPASTO.....	31
TABELLA 3.1.1.2. VALORI DELLE MASSE VOLUMICHE SATURE A SUPERFICIE ASCIUTTA (MVSSA), DELL'ASSORBIMENTO DI ACQUA DOPO 24 ORE E DELL'UMIDITÀ DELLE TRE FRAZIONI.....	32
TABELLA 3.1.3.1. CARATTERISTICHE GEOMETRICHE, MASSA VOLUMICA E QUANTITÀ MICROSISMICHE: CILINDRI DELLA PRIMA SERIE.....	36
TABELLA 3.1.3.2. CARATTERISTICHE GEOMETRICHE, MASSA VOLUMICA E QUANTITÀ MICROSISMICHE: CILINDRI DELLA SECONDA SERIE.....	37
TABELLA 3.1.3.3. CARATTERISTICHE GEOMETRICHE, MASSA VOLUMICA E QUANTITÀ MICROSISMICHE: CILINDRI DELLA TERZA SERIE.....	37
TABELLA 3.1.3.4. MODULO ELASTICO DINAMICO.....	37
TABELLA 3.2.1.1. MISCELE DI PROGETTO.....	48
TABELLA 3.2.1.2. MISCELE REALI CON QUANTITÀ PER BETONIERA (38 L).....	48
TABELLA 3.2.1.3. MISCELE REALI CON QUANTITÀ PER BETONIERA (38 L).....	49
TABELLA 3.2.3.1. INDICI DI DETERMINAZIONE.....	57
TABELLA 3.2.3.2. MISCELA TIPO 1 – 1/2 DEL 05/10/99.....	60
TABELLA 3.2.3.3. MISCELA TIPO 2 – 1/2 DEL 11/10/99.....	61
TABELLA 3.2.3.4. MISCELA TIPO 3 – 1/2 DEL 18/10/99.....	62
TABELLA 3.2.3.5. MISCELA TIPO 4 – 1/2 DEL 26/10/99.....	63
TABELLA 3.2.3.6. MISCELA TIPO 5 – 1/2 DEL 02/11/99.....	64
TABELLA 3.2.3.7. MISCELA TIPO 1 – 2/2 DEL 08/11/99.....	65
TABELLA 3.2.3.8. MISCELA TIPO 2 – 2/2 DEL 15/11/99.....	66
TABELLA 3.2.3.9. MISCELA TIPO 3 – 2/2 DEL 22/11/99.....	67
TABELLA 3.2.3.10. MISCELA TIPO 4 – 2/2 DEL 06/12/99.....	68
TABELLA 3.2.3.11. MISCELA TIPO 5 – 2/2 DEL 13/12/99.....	69
TABELLA 3.2.3.12. MISCELA TIPO 1 – 1/2 DEL 05/10/99.....	70
TABELLA 3.2.3.13. MISCELA TIPO 2 – 1/2 DEL 11/10/99.....	71
TABELLA 3.2.3.14. MISCELA TIPO 3 – 1/2 DEL 18/10/99.....	72
TABELLA 3.2.3.15. MISCELA TIPO 4 – 1/2 DEL 26/10/99.....	73
TABELLA 3.2.3.16. MISCELA TIPO 5 – 1/2 DEL 02/11/99.....	74
TABELLA 3.2.3.17. MISCELA TIPO 1 – 2/2 DEL 08/11/99.....	75
TABELLA 3.2.3.18. MISCELA TIPO 2 – 2/2 DEL 15/11/99.....	76
TABELLA 3.2.3.19. MISCELA TIPO 3 – 2/2 DEL 22/11/99.....	77
TABELLA 3.2.3.20. MISCELA TIPO 4 – 2/2 DEL 06/12/99.....	78
TABELLA 6.2.2.1. COORDINATE LOCALI AREALI DEI NODI DI UNA CELLA.....	144
TABELLA 6.2.2.2. COORDINATE LOCALI AREALI DEI PUNTI DI GAUSS, CON $g = (1 - \sqrt{3})/2$ .....	147
TABELLA 8.4.2.1. CARATTERISTICHE FISICO-MECCANICHE DEI PRODOTTI TONEN.....	191
TABELLA 8.4.2.2. CARATTERISTICHE FISICO-MECCANICHE DEI PRODOTTI REPLARK.....	191
TABELLA 9.2.1. CARATTERIZZAZIONE DEL CONGLOMERATO CEMENTIZIO.....	199
TABELLA 9.2.2. CARATTERISTICHE MECCANICHE DEI TESSUTI FIBROSI DI RINFORZO IMPIEGATI.....	200
TABELLA 9.2.1.1. RISULTATI SPERIMENTALI SUI CILINDRI FASCIATI E NON.....	200

---

**Ferretti Elena**

Modellazione del Comportamento del Cilindro Fasciato in Compressione



TABELLA 9.2.2.1. RISULTATI SPERIMENTALI SULLE COLONNE IN C.A. FASCIATE E NON ..... 201

## BIBLIOGRAFIA

- [1] **Ahmad, S. H., and Shah, S. P.**, “Complete triaxial Stress-Strain Curves for Concrete”, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 108, No. ST4, April 1982, pp. 728-742.
- [2] **Anand, S. C.**, “Constitutive Relations and Solutions Schemes in Plastic Analysis”, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 106, No. EM1, February 1980, pp. 21-36.
- [3] **Arduini, M., Bastianelli, G., Di Leo, A., and Luminari, M.**, “Characterisation According to Fracture Mechanics of Special Road Pavement Concrete”, *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Workshop on the Design and Evaluation of Concrete Pavements*, 1995, pp. 221-236.
- [4] **Bardet, J. P.**, “Orientation of Shear Bands in Frictional Soils”, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 117, No. 7, July 1991, pp. 1466-1484.
- [5] **Barzegar, F., and Maddipudi, S.**, “Three – Dimensional Modeling of Concrete Structures. Part I: Plain Concrete”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 123, No. 10, October 1997, pp. 1339-1346.
- [6] **Barzegar, F., and Maddipudi, S.**, “Three – Dimensional Modeling of Concrete Structures. Part II: Reinforced Concrete”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 123, No. 10, October 1997, pp. 1347-1356.
- [7] **Bažant, Z. P., and Mazars, J.**, “France – U. S. Workshop on Strain Localization and Size Effect due to Cracking and Damage”, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 116, No. 6, June 1990, pp. 1412-1424.
- [8] **Bažant, Z. P.**, “Mechanics of Geomaterials”, John Wiley & Sons Ltd, 1985.
- [9] **Bažant, Z. P., and Gambarova, P.**, “Rough Cracks in Reinforced Concrete”, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 106, No. ST4, April 1980, pp. 819-842.
- [10] **Bažant, Z. P., and Shieh, C. L.**, “Hysteretic Fracturing Endochronic Theory for Concrete”, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 106, No. EM5, October 1980, pp. 929-950.
- [11] **Bažant, Z. P., and Tsubaki, T.**, “Slip-Dilatancy Model for Cracked Reinforced Concrete”, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 106, No. ST9, September 1980, pp. 1947-1966.
- [12] **Bellanger, M., Rémy, J. M., and Homand, F.**, “Ultrasonic Wave Attenuation as a Tool for Estimating Frost Action on Limestone Rocks”, *Materials and Structures / Matériaux et Constructions*, RILEM, Vol. 29, November 1996, pp. 552-561.
- [13] **Bellotti, R., and Rossi, P.**, “Cylinder Tests: Experimental Technique and Results”, *Materials and Structures / Matériaux et Constructions*, RILEM, Vol. 24, 1991, pp. 45-51.

- [14] **Benouniche, S.**, “Modelisation de L’Endommagement du Beton Hydraulique par Microfessuration en Compression”, Dottorato di Ricerca in Meccanica dei Materiali – III Ciclo, Università di Parigi VI, Tesi di Dottorato, Parigi, Dicembre 1979.
- [15] **Bigoni, D.**, “Criteri di Resistenza e Nozioni di Teoria della Plasticità”, dispensa, Istituto di Scienza delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria, Università di Bologna.
- [16] **Bigoni, D.**, “Localizzazione della Deformazione e Biforcazione in Presenza di Leggi Constitutive Elasto – Plastiche Incrementali: Applicazioni a Materiali Fragili – Coesivi”, Dottorato di Ricerca in Meccanica delle Strutture, Università di Bologna, Tesi di Dottorato, Febbraio 1991.
- [17] **Bischoff, P. H., and Perry, S. H.**, “Compressive Behaviour of Concrete at High Strain Rates”, *Materials and Structures / Matériaux et Constructions*, RILEM, Vol. 24, 1991, pp. 425-450.
- [18] **Boinet, J.**, “Prévision de la Résistance des Bétons à Partir d’un Modèle Tenant Compte des Modules Élastiques des Composants, de la Taille et de la Nature des Inclusions”, *Annales de l’Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics*, Série: Théories et Méthodes de Calcul 320, No. 494, June 1991, pp. 91-102.
- [19] **Carpinteri, A., Di Tommaso, A., and Viola, E.**, “Vita a Fatica di Strutture Iperstatiche Metalliche Contendenti Difetti”, *Atti dell’Accademia delle Scienze dell’Istituto di Bologna*, Serie XIII, Tomo VII, Gennaio 1980, pp. 275-294.
- [20] **Cedolin, L., Dei Poli, S., and Iori, I.**, “Tensile Behaviour of Concrete”, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 113, No. 3, March 1987, pp. 431-449.
- [21] **Cornia, L., Federici, L., and Viola, E.**, “Sulla Modellazione dell’Elemento Finito Fessurato di una Trave”, *Atti del XIII Convegno Nazionale del Gruppo Italiano Frattura*, Maggio 1997, pp. 58-67.
- [22] **Cosmi, F.**, “Applicazione del Metodo delle Celle con Approssimazione Quadratica”, *Atti del XXIX Convegno Nazionale dell’Associazione Italiana per l’Analisi delle Sollecitazioni*, Settembre 2000, pp. 131-140.
- [23] **Chen, W. F., and Ting, E. C.**, “Constitutive Models for Concrete Structures”, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 106, No. EM1, February 1980, pp. 1-19.
- [24] **Chung, H. W., and Law, K. S.**, “Assessing Fire Damage of Concrete by Ultrasonic Pulse Technique”.
- [25] **D’Ambrisi, A.**, “Un Modello Costitutivo per il Calcestruzzo e Sue Applicazioni nell’Analisi Non Lineare di Strutture in C. A.”, Dottorato di Ricerca in Meccanica delle Strutture, Università di Bologna, Tesi di Dottorato, Febbraio 1996.
- [26] **Daponte, P., Maceri, F., and Olivito, R. S.**, “Frequency-Domain Analysis of Ultrasonic Pulses for the Measure of Damage Growth in Structural Materials”, *1990 Ultrasonic Symposium*, 1990, pp. 1113-1118.
- [27] **Daponte, P., and Olivito, R. S.**, “Metodi Ultrasonici per il Rilevamento del Danno nel Calcestruzzo: Analisi nel Dominio del Tempo e della Frequenza”, *Meccanica dei Materiali e*

---

delle Strutture, *Atti del Convegno Nazionale in Ricordo di Riccardo Baldacci e Michele Capurso*, 25-27 Ottobre 1989, pp. 297-306.

- [28] **Daponte, P., and Olivito, R. S.**, “Crack Detection Measurements in Concrete”, *Proceedings of the ISMM International Conference Microcomputers Applications*, December 14-16, 1989, pp.123-127.
- [29] **Di Leo, A.**, “Osservazioni sulla Valutazione dei Parametri Statici ed Energetici di Tenacità alla Frattura dei Calcestruzzi mediante Prove di Flessione con Caricamento Centrale su Provini Prismatici Intagliati”, *Atti del IX Convegno Nazionale dell’Associazione Italiana per l’Analisi delle Sollecitazioni*, Settembre 1981, pp. 23-26.
- [30] **Di Tommaso, A., Cianfrone, F., and Pascale, G.**, “Detection of Internal Fissures on Rock Structural Elements of Historical Buildings”, *Engineering Fracture Mechanics*, Pergamon Press plc., Vol. 35, No. 1/2/3, 1990, pp. 473-492.
- [31] **Di Tommaso, A., Pascale, G., and Cianfrone, F.**, “Experimental Microseismic Evaluation of Artificially Induced Defects on Stonework”, *Fracture of Concrete and Rock*, Elsevier Applied Science, 1989, pp. 265-277.
- [32] **Dougill, J. W., and Rida, M. A. M.**, “Further Consideration of Progressively Fracturing Solids”, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 106, No. EM5, October 1980, pp. 1021-1038.
- [33] **Drescher, A., and Vardoulakis, I.**, “Geometric Softening in Triaxial Tests on Granular Material”, *Géotechnique*, Vol. 32, No. 4, 1982, pp. 291-303.
- [34] **Dungar, R., and Nuh, S.**, “Endochronic – Critical State Models for Sand”, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 106, No. EM5, October 1980, pp. 951-968.
- [35] **Erdogan, F., and Sih, G. C.**, “On the Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear”, *Journal of Basic Engineering*, December 1963, pp. 519-546.
- [36] **Ferretti, E., Viola, E., and Di Leo, A.**, “Impiego del Metodo delle Celle nella Stima dei Fattori di Intensificazione degli Sforzi”, *Atti del XXIX Convegno Nazionale dell’Associazione Italiana per l’Analisi delle Sollecitazioni*, Settembre 2000, pp. 699-708.
- [37] **Ferretti, E., Viola, E., and Di Leo, A.**, “Sul Calcolo dei Fattori di Intensificazione degli Sforzi mediante il Metodo delle Celle”, *Atti del Congresso IGF*, Maggio 2000, pp.
- [38] **Ferretti, E., Viola, E., Di Leo, A., and Pascale, G.**, “Propagazione della Frattura e Comportamento Macroscopico in Compressione del Calcestruzzo”, *Atti del XIV Congresso Nazionale AIMETA*, Ottobre 1999, pp.
- [39] **Ferretti, E., Viola, E., and Di Leo, A.**, “Modellazione del Comportamento Macroscopico in Compressione del Calcestruzzo a partire da Nuove Assunzioni Costitutive”, *Atti del XXVIII Convegno Nazionale dell’Associazione Italiana per l’Analisi delle Sollecitazioni*, Settembre 1999, pp. 767-776.

- [40] **Ferretti, E., and Carli, R.**, “Programma Sperimentale sul Comportamento in Compressione Monoassiale del Calcestruzzo – Parte II: Elaborazione dei Risultati Sperimentali”, *Nota Tecnica N° 33 – DISTART – Università degli Studi di Bologna*, 1999.
- [41] **Ferretti, E., and Carli, R.**, “Programma Sperimentale sul Comportamento in Compressione Monoassiale del Calcestruzzo – Parte I: Risultati Sperimentali”, *Nota Tecnica N° 25 – DISTART – Università degli Studi di Bologna*, 1999.
- [42] **Ferretti, E., Viola, E., and Di Leo, A.**, “Comportamento Macroscopico in Compressione dei Calcestruzzi e Nuove Assunzioni Costitutive”, *Atti del Congresso su “La Sicurezza delle Strutture in Calcestruzzo ad Alte Prestazioni”*, Progetto Nazionale Cofinanziato dal Murst – 1997-98, 11-12 Marzo 1999, pp. 69-72.
- [43] **Ferretti, E., Viola, E., and Di Leo, A.**, “Deduzione di Nuove Leggi Costitutive per il Calcestruzzo a partire dal Comportamento Macroscopico in Compressione”, *Nota Tecnica N° 24 – DISTART – Università degli Studi di Bologna*, 1999.
- [44] **Fleck, N. A., Hutchinson, J. W., and Tvergaard, V.**, “Softening by Void Nucleation and Growth in Tension and Shear”, *J. Mech. Phys. Solids*, Elsevier Science Ltd, Vol. 37, No. 4, April 1989, pp. 515-540.
- [45] **Frantziskonis, G., Desai, C. S., Tang, F. F., and Daniewicz, D.**, “Degradation Mechanisms in Brittle Materials Investigated by Ultrasonic Scanning”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 42, No. 2, 1992, pp. 347-369.
- [46] **Gajer, G., and Dux, P. F.**, “Crack Band Based Model for FEM Analysis of Concrete Structures”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 116, No. 6, June 1990, pp. 1696-1714.
- [47] **Geyskens, P., Der Kiureghian, A., and Monteiro, P.**, “Bayesian Prediction of Elastic Modulus of Concrete”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 124, No. 1, January 1998, pp. 89-95.
- [48] **Ghinelli, F.**, “Sperimentazione e Modellazione del Comportamento a Compressione del Conglomerato Cementizio Confinato con FRP”, Università di Bologna, Tesi di Laurea, Bologna, Marzo 1997.
- [49] **Goretti, A.**, “Evoluzione dei Modelli di Comportamento del Conglomerato Teso”, Dottorato di Ricerca in Ingegneria delle Strutture – IV Ciclo, Università di Roma “La Sapienza” – Università dell’Aquila, Tesi di Dottorato, Roma, Febbraio 1992.
- [50] **Hanna, S., and Jones, R.**, “Composite Wraps for Ageing Infrastructures: Concrete Columns”, *Composite Structures*, Vol. 38, No. 1-4, 1987, pp. 57-64.
- [51] **Harmon, T. G., and Slattery, K. T.**, “Advanced Composite Confinement of Concrete”, *Advanced Composite Materials in bridges and Structures*, Canadian Society for Civil Engineering, 1992, pp. 299-306.
- [52] **Harmon, T., Slattery, K., and Ramakrishnan, S.**, “The Effect of Confinement Stiffness on Confined Concrete”, *Non-Metallic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures*, RILEM, 1995, pp. 584-592.

- 
- [53] Hasan, W., Piva, A., and Viola, E., “Approccio di Identificazione nella Meccanica della Frattura”, Nota Tecnica No. 143, Università di Bologna, Facoltà di Ingegneria, Istituto di Scienza delle Costruzioni, 1995.
- [54] Hasan, W., Piva, A., and Viola, E., “Sull’Identificazione delle Costanti Elastiche di un Solido Fessurato di Materiale Ortotropo”, *Atti del XII Convegno Nazionale Gruppo Italiano Frattura*, Parma, Giugno 1996.
- [55] Hoshikuma, J., Kawashima, K., Nagaya, K., and Taylor, A. W., “Stress – Strain Model for Confined Reinforced Concrete in Bridge Piers”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 123, No. 5, May 1997, pp. 624-633.
- [56] Hosotani, M., Kawashima, K., and Hoshikuma, J. I., “A Study on Confinement Effect of Concrete Cylinders by Carbon Fibre Sheets”, *Non-Metallic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures*, Proceedings of the Third International Symposium, RILEM, Vol. 1, October 1997, pp. 209-216.
- [57] Huebner, K. H., “The Finite Element Method for Engineers”, John Wiley and Sons, 1995, pp. 39-59.
- [58] Ju, J. W., and Lee, X., “Micromechanical Damage Models for Brittle Solids. Part I: Tensile Loadings”, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 117, No. 7, July 1991, pp. 1495-1514.
- [59] Ju, J. W., and Lee, X., “Micromechanical Damage Models for Brittle Solids. Part II: Compressive Loadings”, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 117, No. 7, July 1991, pp. 1515-1536.
- [60] Kachanov, L. M., “Continuum Model of Medium with Cracks”, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 106, No. EM5, October 1980, pp. 1039-1051.
- [61] Karabinis, A. I., and Kioussis, P. D., “Effects of Confinement on Concrete Columns: Plasticity Approach”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 120, No. 9, September 1994, pp. 2747-2767.
- [62] Kioussis, P. D., “Strain Space Approach for Softening Plasticity”, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 113, No. 2, February 1987, pp. 210-221.
- [63] Krajcinovic, D., “Constitutive Equations for Damaging Materials”, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 50, June 1983 pp. 355-360.
- [64] Krajcinovic, D., and Fonseka, G. U., “The Continuous Damage Theory of Brittle Materials – Part I: General Theory”, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 48, December 1981, pp. 809-815.
- [65] Lemaitre, J., “Coupled Elasto-Plasticity and Damage Constitutive Equations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier Science Publishers B. V., Vol. 51, 1985, pp. 31-49.
- [66] Levy, A. J., “The Debonding of Elastic Inclusions and Inhomogeneities”, *J. Mech. Phys. Solids*, Elsevier Science Ltd, Vol. 39, No. 4, 1991, pp. 477-505.

- [67] Li, Q., and Ansari, F., "Mechanics of Damage and Constitutive Relationships for High – Strength Concrete in Triaxial Compression", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 125, No. 1, January 1999, pp. 1-10.
- [68] Liu, J., and Foster, S. J., "Finite – Element Model for Confined Concrete Columns", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 124, No. 9, September 1998, pp. 1011-1017.
- [69] Lubliner, J., Oliver, J., Oller, S., and Oñate, E., "A Plastic – Damage Model for Concrete", *Int. J. Solids Structure*, Vol. 25, No. 3, March 1989, pp. 299-326.
- [70] Macchi, S., Ravasio, F., and Ciurnelli, F., "Sonic Tomography and Radar Investigation on the Pillars of Pavia Cathedral".
- [71] Mazars, J., "A Description of Micro- and Macroscale Damage of Concrete Structures", *Engineering Fracture Mechanics*, Pergamon Press Ltd, Vol. 25, Nos 5/6, 1986, pp. 729-737.
- [72] Mazars, J., and Pijaudier Cabot, G., "Continuum Damage Theory – Application to Concrete", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 115, No. 2, February 1989, pp. 345-365.
- [73] Menétrey, P., Walther, R., Zimmermann, T., Willam, K. J., and Regan, P. E., "Simulation of Punching Failure in Reinforced – Concrete Structures", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 123, No. 5, May 1997, pp. 652-659.
- [74] Mirmiran, A., and Shahawy, M., "Behavior of Concrete Columns Confined by Fibre Composites", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 123, No. 5, May 1997, pp. 583-590.
- [75] Mukherjee, A., Ramana, V. P. V., Kant, T., Dutta, P. K., and Desai, Y. M., "Behaviour of Concrete Columns Confined by Fibre Composites", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 124, No. 9, September 1998, pp. 1094-1095.
- [76] Nappi, A., Rajgelj, S., and Zaccaria, D., "A Discrete Direct Formulation for Elastic – Plastic Analysis", 1998.
- [77] Olivito, R. S., and Surace, L., "Una Metodologia Ultrasonica per lo Studio del Danneggiamento in Provini di Calcestruzzo", pp. 418-425.
- [78] Ortiz, M., "Extraction of Constitutive Data from Specimens Undergoing Strain Localization", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 115, No. 8, August 1989, pp. 1748-1760.
- [79] Ouyang, C., Wollrab, E., Kulkarni, S. M., and Shah, S. P., "Prediction of Cracking Response of Reinforced Concrete Tensile Members", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 123, No. 1, January 1997, pp. 70-78.
- [80] Pascale, G., and Di Leo, A., "Controllo Non Distruttivo del Calcestruzzo nell'Edilizia Industrializzata", Atti del Congresso cte sulla Industrializzazione Edilizia, Novembre 1984.

- 
- [81] **Pascale, G., Ferretti, E., Carli, R., and Bastianini, F.**, “Rilievo con metodi microsismici della formazione e della propagazione di superfici di scorrimento in cilindri di HPC compressi”, *Atti del Congresso su “La Sicurezza delle Strutture in Calcestruzzo ad Alte Prestazioni”*, Progetto Nazionale Cofinanziato dal Murst – 1997-98, 11-12 Marzo 1999, pp. 73-76.
- [82] **Polak, M. A., and Blackwell, K. G.**, “Modeling Tension in Reinforced Concrete Members Subjected to Bending and Axial Load”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 124, No. 9, September 1998, pp. 1018-1024.
- [83] **Radi, E., and Bigoni, D.**, “Effects on Anisotropic Hardening on Crack Propagation in Porous – Ductile Materials”, *J. Mech. Phys. Solids*, Elsevier Science Ltd, Vol. 44, No. 9, 1996, pp. 1475-1508.
- [84] **Rémy, J. M., Bellanger, M., and Homand, F.**, “Ultrasonic Wave Attenuation is a Tool for Estimating Frost Action on Limestone Rocks”.
- [85] **Resende, L.**, “A Damage Mechanics Constitutive Theory for the Inelastic Behaviour of Concrete”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier Science Publishers B. V., Vol. 60, 1987, pp. 57-93.
- [86] **Resende, L., and Martin, J. B.**, “A Progressive Damage Continuum Model for Granular Materials”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier Science Publishers B. V., Vol. 42, 1984, pp. 1-18.
- [87] **Rogers, L. M., and Phillips, L. P.**, “Acoustic Emission and Ultrasonic Testing of Concrete Structures” *Structural Integrity Assessment*, Elsevier Applied Science.
- [88] **Rossi, P.**, “A Physical Phenomenon Which Can Explain the Mechanical Behaviour of Concrete under High Strain Rates”, *Materials and Structures / Matériaux et Constructions*, RILEM, Vol. 24, 1991, pp. 422-424.
- [89] **Roux, S.**, “Continuum and Discrete Description of Elasticity”, *Statistical Models for the Fracture of Disordered Media*, H. J. Herrmann and S. Roux (ed.) Elsevier Science Publishers, B. V. (N. Holland), 1990, pp. 109-113.
- [90] **Rudnicki, J. W., and Rice, J. R.**, “Conditions for the Localization of Deformations in Pressure – Sensitive Dilatant Materials”, *J. Mech. Phys. Solids*, Pergamon Press, Vol. 23, 1975, pp. 371-394.
- [91] **Saadatmanesh, H., Ehsani, M. R., and Li, M. W.**, “Strength and Ductility of Concrete Columns Externally Reinforced with Fibre Composite Straps”, *ACI Structural Journal*, Vol. 91, No. 4, July-August 1994, pp. 434-447.
- [92] **Saatcioglu, M., and Razvi, S. R.**, “Strength and Ductility of Confined Concrete”, *J. Struct. Engrg.*, ASCE, Vol. 118, No. 6, 1992, pp. 1590-1607.
- [93] **Samaan, M., Mirmiran, A., and Shahawy, M.**, “Model of Concrete Confined by Fibre Composites”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 124, No. 9, September 1998, pp. 1025-1031.



- [94] Samra, R. M., “Ductility Analysis of Confined Columns”, *Journal of Structural Division*, ASCE, Vol. 116, No. 11, November 1990, pp. 3148-3161. \*
- [95] Sheikh, S. A., and Uzumeri, S. M., “Strength and Ductility of Tied Concrete Columns”, *Journal of Structural Division*, ASCE, Vol. 106, No. ST5, May 1980, pp. 1079-1102.
- [96] Shentu, L., Jiang, D., and Hsu, C. T. T., “Load – Carrying Capacity for Concrete Slabs on Grade”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 123, No. 1, January 1997, pp. 95-103.
- [97] Simo, J. C., and Ju, J. W., “Strain- and Stress-Based Continuum Damage Models – Part I: Formulations”, *Int. J. Solids Structures*, Pergamon Journals Ltd, Vol. 23, No. 7, July 1987, pp. 821-840.
- [98] Tommasini, M., “Identification of Historical Masonry Building by Tomographic Tests”.
- [99] Tonti, E., “A Finite Formulation of Field Equations: The Cell Method”, *submitted to Computer Modelling in Engineering and Science*, Editor-in-Chief Atluri.
- [100] Tonti, E., “A Finite Formulation for the Wave Equation”, *Journal of Computational Acoustics*, in print.
- [101] Tonti, E., “Finite Formulation of the Electromagnetism Field”, *Progress in Electromagnetic Research*, Pier 32, 2001, in print.
- [102] Tonti, E., “Formulazioni Finite delle Equazioni di Campo: il Metodo delle Celle”, *Atti del XIII Convegno Italiano di Meccanica Computazionale*, Brescia, 13-15 novembre 2000.
- [103] Tonti, E., “Algebraic Topology and Computational Electromagnetism”, *Fourth International Workshop on the Electric and Magnetic Fields: from Numerical Models to Industrial Applications*, Marseille, 1998, pp. 284-294.
- [104] Tonti, E., “On the Geometrical Structure of Electromagnetism”, *Gravitation, Electromagnetism and Geometrical Structures, for the 80<sup>th</sup> birthday of A. Lichnerowicz*, Edited by G. Ferrarese, Pitagora Editrice, Bologna, 1995, pp.281-308.
- [105] Torrenti, J. M., and Benaija, E. H., “Stereophotogrammetry: a New Way to Study Strain Localization in Concrete under Compression”, *Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Conference on Experimental Mechanics*, LCPC, 20 – 24 August 1990.
- [106] Torrenti, J. M., Desrues, J., Acker, P., and Boulay, C., “ Application of Stereophotogrammetry to Strain Localization in Concrete Compression”.
- [107] Torrenti, J. M., Desrues, J., and Benaija, E. H., “The Application of Stereophotogrammetry to Strain Localization in Concrete”, *Proceedings of the 1989 Spring Conference on Experimental Mechanics*, LCPC, May 28 – June 1 1989, pp. 1-10.
- [108] Torrenti, J. M., Desrues, J., Benaija, E. H., and Boulay, C., “Stereophotogrammetry and Localization in Concrete under Compression”, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 117, No. 7, July 1991, pp. 1455-1465.

- [109] **Tsai, W. T.**, “Stress and Strains of Radially Reinforced Hollow Cylinders”, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 113, No. 2, February 1987, pp. 281-287.
- [110] **Tvergaard, V., and Van Der Giessen, E.**, “Effect of Plastic Spin on Localization Predictions for a Porous Ductile Material”, *J. Mech. Phys. Solids*, Elsevier Science Ltd, Vol. 39, No. 6, 1991, pp. 763-781.
- [111] **Vinh, T., and Chevalier, Y.**, “Dynamic Ultrasonic Damage Indicators and Applications to Advanced Composite Materials”, *Structural Integrity Assessment*, Elsevier Applied Science.
- [112] **Xiao, Y., and Ma, R.**, “Seismic Retrofit of RC Circular Columns Using Prefabricated Composite Jacketing”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 123, No. 10, October 1997, pp. 1357-1364.
- [113] **Yankelevsky, D. Z., and Reinhardt, H. W.**, “Uniaxial Behaviour of Concrete in Cyclic Tension”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 115, No. 1, January 1989, pp. 166-182.