

Elena FERRETTI

**IDENTIFICAZIONE DEL LEGAME COSTITUTIVO  
PER CALCESTRUZZO DANNEGGIATO**

Nota Tecnica n. 71

Anno 2002



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BOLOGNA

**DISTART**

Dipartimento di Ingegneria delle Strutture, dei Trasporti,  
delle Acque, del Rilevamento, del Territorio

Viale Risorgimento, 2 – 40136 Bologna



Elena FERRETTI

# **IDENTIFICAZIONE DEL LEGAME COSTITUTIVO PER CALCESTRUZZO DANNEGGIATO**



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BOLOGNA

**DISTART**

Dipartimento di Ingegneria delle Strutture, dei Trasporti,  
delle Acque, del Rilevamento, del Territorio  
Viale Risorgimento, 2 – 40136 Bologna

Stampato presso il DISTART dell'Università di Bologna  
Bologna, MAGGIO 2002

Pubblicazione registrata ai sensi dell'art. 1 del Decreto legislativo luogotenenziale del 31 agosto 1945, n.660 presso la Procura della Repubblica di Bologna in data 7 Maggio 2002 e presso la Prefettura di Bologna in data 7 Maggio 2002.

# IDENTIFICAZIONE DEL LEGAME COSTITUTIVO PER CALCESTRUZZO DANNEGGIATO

Elena FERRETTI

## GENERALITÀ

La presente Nota Tecnica si pone come nota riassuntiva dell'attività svolta dall'Autrice sul tema dell'identificazione del legame costitutivo per calcestruzzo danneggiato, consistita in:

- ricerca del legame costitutivo tensione efficace-deformazione efficace del calcestruzzo in compressione nominalmente monoassiale;
- modellazione del comportamento meccanico del solido di prova.

La prima fase del lavoro è stata attinente all'analisi dei risultati di un programma sperimentale su solidi cilindrici in calcestruzzo di varia snellezza. Il diagramma carico-spostamento sperimentalmente stabilito è stato utilizzato per definire un approccio utile alla definizione della curva di danno e alla identificazione del legame costitutivo obiettivo. Di rilievo gli aspetti algebrici sviluppati, che hanno portato a dimostrare l'inammissibilità di un comportamento softening costitutivo per materiale con danno.

A tale fase, si è aggiunta, avvalendosi del Metodo delle Celle, una modellazione teorico-numerica per simulare il comportamento di un solido in compressione con frattura, proponendo una tecnica di aggiornamento automatico della mesh con l'evolversi dei quadri fessurativi.

## DESCRIZIONE DEL PROGRAMMA SPERIMENTALE

Sono stati confezionati 18 provini cilindrici di ugual diametro  $D$ , con  $D = 155.5$  mm, e 6 diversi rapporti altezza/diametro,  $r = H/D$ . I cilindri realizzati sono stati classificati in funzione del valore di  $r$ :

- Cilindro tipo 1:  $r = 1.5$  ;
- Cilindro tipo 2:  $r = 2$  ;
- Cilindro tipo 3:  $r = 2.5$  ;
- Cilindro tipo 4:  $r = 3$  ;
- Cilindro tipo 5:  $r = 3.5$  ;
- Cilindro tipo 6:  $r = 4$  ;

In tutto, sono stati confezionati 3 provini per ogni assegnato valore di  $r$ . I cilindri sono stati suddivisi in tre serie di 6 provini ciascuna e confezionati in tre fasi successive. In ogni serie è stato incluso un solo provino per ogni tipo. Per rendere confrontabili i risultati relativi a ciascuna fase di confezionamento, ogni serie è stata ricavata da un unico impasto.

Utilizzando un programma di mix-design, si sono progettate le quantità dei componenti da impiegare per mc e per ogni singolo impasto, una volta fissato il valore di resistenza cubica caratteristica a compressione convenzionale (tab. (1)).

I materiali utilizzati per il confezionamento dei provini sono i seguenti:

- cemento CEM I 42.5 R, proveniente dalla cementeria di Merone (CO);

- aggregato, formato da tre frazioni:

1. sabbia fine 0÷5 mm, proveniente dalla Cava AGES di Castenaso (BO),
2. pietrischetto 5÷15 mm, proveniente dalla Cava AGES di Castenaso (BO),
3. pietrisco 15÷22 mm, proveniente dalla Cava AGES di Castenaso (BO).

La curva granulometrica dell'aggregato è riportata in fig. (1).

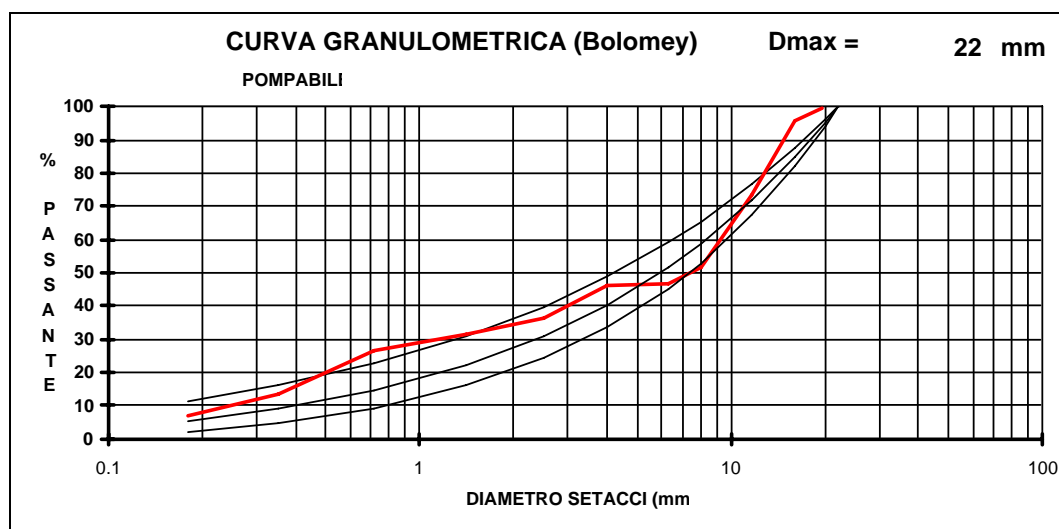
I valori delle masse volumiche sature a superficie asciutta (MvSSA), dell'assorbimento di acqua dopo 24 ore e dell'umidità delle tre frazioni sono riportati in tab. (2).

**Tab. 1** Quantità dei componenti impiegati per mc e per ogni singolo impasto.

	Dos./mc (Kg)	Dos. Compl. (Kg)	Dos. Beton. (Kg)
Cemento	350	49.7	21.0
Acqua	162	23.0	10.2
Sabbia	822	116.7	49.3
Pietrischetto	524	74.4	31.4
Pietrisco	527	74.8	31.6

**Tab. 2** Valori delle masse volumiche sature a superficie asciutta (MvSSA), dell'assorbimento di acqua dopo 24 ore e dell'umidità delle tre frazioni.

	MvSSA (g/cm <sup>3</sup> )	Assorb. H <sub>2</sub> O (24h)(%)	Umidità (%)
Sabbia fine	2.70	0.23	3.84
Pietrischetto	2.74	0.71	0.68
Pietrisco	2.66	1.22	1.14



**Fig. 1** Curva granulometrica dell'aggregato.

La normativa tecnica assunta come riferimento per il confezionamento dei provini è la seguente:

- UNI 8520/5, Aggregati per confezione di calcestruzzi - Analisi granulometrica;
- UNI 8520/13, Determinazione della massa volumica e dell'assorbimento degli aggregati fini;
- UNI 6128, Confezione in laboratorio di calcestruzzi sperimentali;
- UNI 6127, Provini di calcestruzzo - Preparazione e stagionatura;

- UNI 9418, Calcestruzzo fresco - Determinazione della consistenza - Prova di abbassamento al cono (slump test).

Durante il confezionamento, gli stampi sono stati sottoposti a vibrazione mediante ago vibrante, per poter facilitare l'uscita dell'aria e raggiungere una costipazione ottimale.

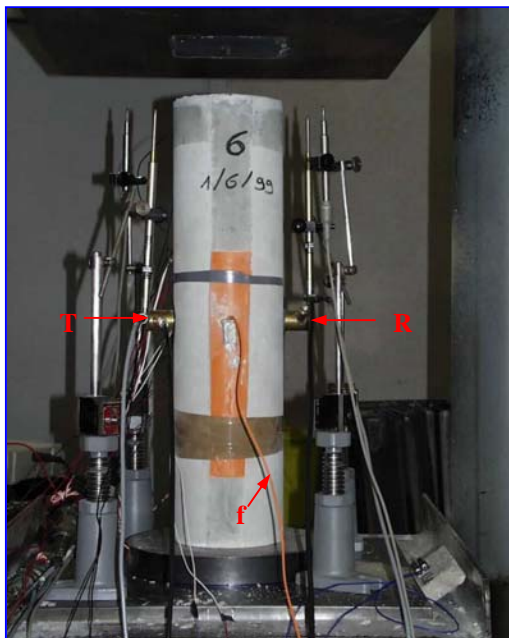
Ultimata la fase di confezionamento, gli stampi sono stati collocati in ambiente a 20°C e umidità relativa non inferiore al 90%. Dopo 24h i provini sono stati sformati, numerati e posti a maturare in acqua per 14 giorni.

Per ragioni di uniformità delle condizioni al contorno, i cilindri inclusi nella stessa serie sono stati provati tutti nello stesso giorno.

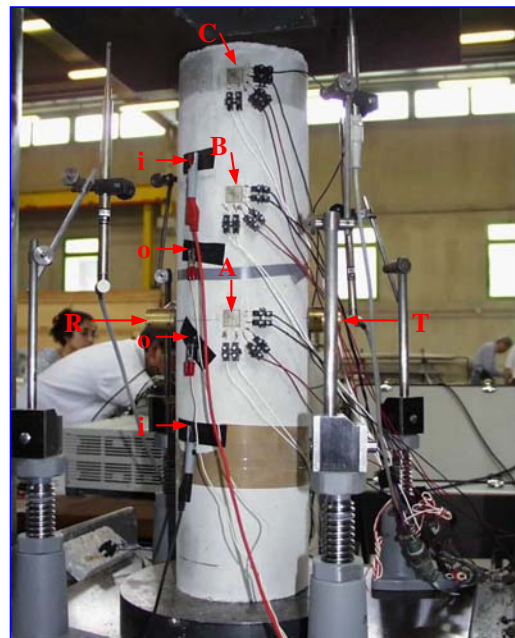
Al termine del periodo di maturazione, di tutti i provini è stato rilevato il peso, l'altezza, il diametro e la velocità di propagazione di impulsi ultrasonici, emessi alla frequenza di 75 kHz.

Le prove di compressione semplice sono state effettuate in controllo di spostamento relativo dei piatti della pressa con velocità di deformazione  $\dot{\epsilon}$  costante e uguale a  $350 \mu\epsilon/\text{min}$ .

Lo spostamento relativo dei piatti della pressa è stato ottenuto come media dei valori rilevati da 4 trasduttori induttivi (LVDT). I trasduttori sono stati collocati in modo da monitorare le 4 generatrici individuate, sulla generica sezione trasversale dei provini, da una coppia prefissata di diametri mutualmente ortogonali.



**Fig. 2** Strumentazione del cilindro tipo 6 della terza serie: vista anteriore.



**Fig. 3** Strumentazione del cilindro tipo 6 della terza serie: vista posteriore.

Nel punto di polarsimmetria dei provini di tipo 1 e 6 ricavati dal terzo impasto, è stata misurata la deformazione radiale per mezzo di un sensore in fibra ottica (FOS) annegato nell'impasto all'atto del getto. Il FOS utilizzato appartiene alla famiglia di sensori il cui funzionamento è basato sull'uso congiunto dei principi interferometrici di Fabry-Pérot e di Fizeau. Il cavo a protezione della fibra ottica, indicato in fig. (2) con la lettera "f", è stato fatto fuoriuscire lateralmente dal provino ed è stato fissato su un supporto esterno con colla a caldo. Questa applicazione è stata condotta con la collaborazione della Dottoranda Barbara Bofiglioli.

Gli stessi provini di tipo 1 e 6, sono stati monitorati con 3 rosette triassiali poste sulla superficie laterale del cilindro e lungo la stessa generatrice. In particolare:

- la rosetta "A" è stata collocata in corrispondenza della sezione di mezzeria;
- la rosetta "C" è stata collocata a 4 cm dalla faccia superiore del cilindro;
- la rosetta "B" è stata collocata in posizione intermedia tra le due rosette "A" e "C".

Nel provino di tipo 6 ricavato dal terzo getto, si è effettuata una misura preliminare della variazione della resistività tra due punti prefissati. I punti tra i quali si è valutata la variazione di

resistività sono stati posti lungo la stessa generatrice e sono indicati in figura dalla lettera “o”. I punti collegati al generatore di ddp, allineati coi due punti “o”, sono invece indicati con la lettera “i”. Trattandosi di una misura preliminare, si è curato di posizionare ad intervalli regolari i punti “o” ed i punti “i”, ma non si è data importanza alla posizione esatta dei punti suddetti lungo la generatrice. Si sono utilizzati elettrodi a disco ricoperti da una patina di cloruro d’argento e la corrente è stata misurata mediante un voltmetro ad alta impedenza d’ingresso. Gli elettrodi sono stati mantenuti in posizione con nastro adesivo. L’accoppiamento elettrodi-superficie del provino è stata garantita tramite interposizione di gel. Questa tecnica sperimentale è stata adottata con la collaborazione del Prof. Giovanni Santarato dell’Università di Ferrara.

Per tutti i provini, durante la prova di carico è stato effettuato un rilievo microsismico sul percorso diametrale a metà altezza. Le variazioni di tempo di attraversamento  $T$  e di attenuazione  $G$  delle onde elastiche di vibrazione in ricezione sono state rilevate in continuo al variare del carico esterno. La sonda trasmettente e la sonda ricevente sono indicate in fig. (2) e (3), rispettivamente, dalle lettere “T” e “R”.

#### APPROCCIO PER L’IDENTIFICAZIONE DEL LEGAME COSTITUTIVO TENSIONE EFFICACE-DEFORMAZIONE EFFICACE

Nell’intento di derivare dai dati sperimentali un legame costitutivo del materiale in compressione monoassiale, è comune definire la tensione media  $\bar{\sigma}$  e la deformazione media  $\bar{\varepsilon}$  come mostrato in fig. (4).

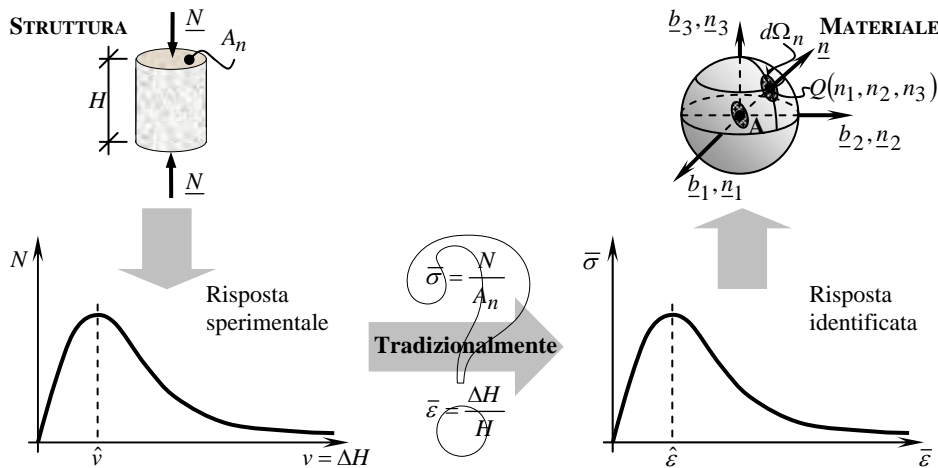


Fig. 4 Tradizionale identificazione della legge costitutiva monoassiale a partire dai risultati sperimentali

Alla relazione  $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$  in fig. (4) viene attribuito il significato di legge costitutiva in monoassiale per processi di deformazione monotoni. Tuttavia, l’associazione al legame  $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$  dell’attributo “costitutivo”, nel senso di rappresentativo del comportamento meccanico del materiale, si presta alle seguenti osservazioni:

1. una legge costitutiva non può comprendere l’effetto dimensionale, come invece si verifica per la legge  $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$  di fig. (4);
2. l’approccio di identificazione di fig. (4) consiste in un mero cambiamento di scala: la curva identificata risulta omotetica a quella sperimentale. Tuttavia, poiché il concetto di instabilità perde senso nell’intorno infinitesimo (scala del materiale) [3], non è possibile associare significato fisico al comportamento softening della risposta del materiale. D’altra parte, già a partire dall’inizio del XX secolo, diversi autori hanno considerato del tutto inammissibile il comportamento strain-softening.

Le osservazioni evidenziate derivano dall’impossibilità di eseguire prove meccaniche sul materiale: i solidi di prova correntemente utilizzati per tale finalità sono da considerare strutture interagenti con la macchina di prova (fig.(4), [4]). Ne consegue che i risultati sperimentali caratterizzano in modo univoco la risposta del sistema provino-macchina di prova, mentre non sono



in alcun modo rappresentativi della risposta costitutiva del materiale. In questo senso, associando il diagramma carico-spostamento,  $N-v$ , di fig. (4) al risultato di una prova di compressione su materiale aggregativo, il ramo softening può essere associato solo a quel particolare stato strutturale che viene indicato col termine “instabilità” e non può essere indicativo della risposta costitutiva del materiale se non attraverso un modello di identificazione. Vale a dire, per identificare leggi costitutive a partire da risultati sperimentali, è necessario valutare tutti i fattori che influenzano una prova di caratterizzazione meccanica. Infatti, per la natura strutturale del provino, il risultato sperimentale ( $R$ ) dipende non solo dalle proprietà costitutive ( $C$ ), ma anche dalla meccanica strutturale ( $S$ ), dall’interazione tra la macchina di prova ed il provino ( $I$ ) e dalle caratteristiche metrologiche della macchina di prova ( $M$ ):

$$R = C + S + I + M . \quad (1)$$

Pertanto, si impone di ricercare (problema inverso) una procedura di identificazione del comportamento del materiale che rimuova le osservazioni all’approccio in fig. (4), a partire dal risultato sperimentale. Nel presente lavoro viene avanzata una proposta di identificazione del legame tensione efficace-deformazione efficace per calcestruzzo in compressione monoassiale monotona.

Si indichino con  $K_C$ ,  $K_S$ ,  $K_I$  e  $K_M$  i contributi pesati assunti, rispettivamente, da  $C$ ,  $S$ ,  $I$  e  $M$  nella definizione di  $R$  (eq. (1)):  $C = K_C R$ ,  $S = K_S R$ ,  $I = K_I R$ ,  $M = K_M R$ , con  $K_C + K_S + K_I + K_M = 1$ . Tutti i contributi pesati estranei al comportamento costitutivo possono essere raggruppati in un unico fattore:

$$K = K_S + K_I + K_M . \quad (2)$$

La procedura di identificazione in fig. (4) comporta:

$$C \equiv R . \quad (3)$$

Con la posizione in eq. (2), l’eq. (3) viene sostituita dalla:

$$C = (1 - K)R . \quad (4)$$

L’equazione (4) permette di valutare le proprietà costitutive del materiale tenendo presente il comportamento del sistema provino-macchina di prova, rappresentato dal parametro  $K$ . Questo approccio, formalmente corretto, non è di immediata utilizzazione per l’identificazione di proprietà costitutive. Infatti, nel caso più generale,  $K_C = K_C(R)$ ,  $K_S = K_S(R)$ ,  $K_I = K_I(R)$  e  $K_M = K_M(R)$ , e quindi anche

$$K = K(R) , \quad (5)$$

sono funzioni del generico passo di carico e non costanti del sistema provino-macchina di prova.

In conclusione, non è possibile stabilire una corrispondenza omotetica tra curva sperimentale carico-spostamento e legame costitutivo monoassiale tensione-deformazione. Inoltre, poiché l’eq. (5) non è di obiettiva determinazione, il fattore di scala tra  $C$  e  $R$  può solo essere stimato, con riguardo alla scala del materiale. Ciò comporta l’identificazione di una risposta efficace e non costitutiva nella sua accezione formale rigorosa.

Ulteriore conseguenza dell’eq. (4), con la specificità dell’eq. (5) è la perdita di identità tra la forma della curva sperimentale e quella della curva efficace. In altre parole, la curva efficace potrebbe non esibire il tipico comportamento softening della curva sperimentale. Inoltre, poiché è impossibile associare un significato fisico al comportamento strain-softening della risposta materiale, è condizione necessaria che la legge efficace identificata risulti monotona crescente.

Un’analisi [3] dei rapporti reciproci tra  $K_C$ ,  $K_S$ ,  $K_I$  e  $K_M$  per il calcestruzzo compresso ha mostrato che è possibile assumere  $K \cong K_S$ . Ovvero, in riferimento a provini cilindrici, la forte

variazione dello schema strutturale che consegue alla propagazione di quadri fessurativi dominanti a forma bi-conica (fig. (5)) risulta preponderante rispetto agli altri addendi che compongono  $K$  (eq. (2)). Ne segue che, per identificare il fattore di scala dell'asse  $\sigma$  rispetto all'asse  $N$  (fig. (4)), è fondamentale introdurre un parametro le cui dimensioni siano quelle di un'area e la cui legge evolutiva sia indicativa della variazione con  $v$  dello schema strutturale. Nel seguito, questo parametro sarà indicato col simbolo  $A_{res}$ , area resistente. Nell'ipotesi  $K \cong K_s$ , il provino può essere considerato una struttura resistente (fig. (5)) con una parte di volume non collaborante.

Nel presente lavoro, si propone di valutare l'area resistente  $A_{res}$  in accordo con la Meccanica del Danno:

$$A_{res} = A_n(1 - D), \quad (6)$$

dove per  $D$ , parametro di danno, viene data una formulazione scalare.

In accordo con l'eq. (6), la tensione efficace  $\sigma_{eff}$  viene definita come tensione media sull'area  $A_{res}$ :

$$\sigma_{eff} = \frac{N}{A_{res}}, \quad (7)$$

ovvero, in maniera equivalente:

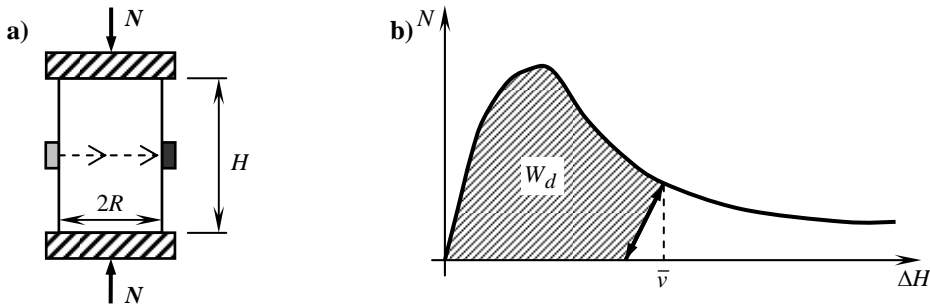
$$\sigma_{eff} = \bar{\sigma} \frac{A_n}{A_{res}}.$$

L'analogia col modo di operare della Meccanica del Danno è limitata all'espressione in eq. (6). Infatti, nella Meccanica del Danno,  $D$  ha una formulazione analitica ed è considerato uniformemente distribuito su  $A_n$ ; in questo studio, invece,  $D = D(R)$  viene valutato sperimentalmente ed è considerato localizzato nel volume di materiale non collaborante. Per valutare  $D = D(R)$ , si sono impiegate due diverse leggi sperimentali di danno. La prima legge,  $D_1$ , mette in relazione il danno con la velocità al punto corrente  $V$  e la velocità iniziale  $V_0$  del segnale microsismico (set-up della prova sperimentale in fig. (6a)):

$$D_1 = 1 - V/V_0.$$

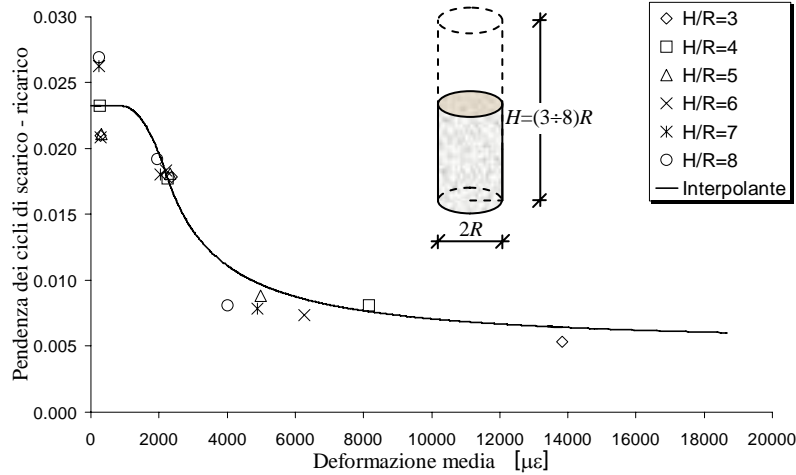
La seconda legge [4],  $D_2$ , mette in relazione il danno con l'energia dissipata al punto corrente  $W_d$  e l'energia dissipata totale  $W_{d,t}$  (fig. (6b)):

$$D_2 = W_d / W_{d,t}. \quad (8)$$

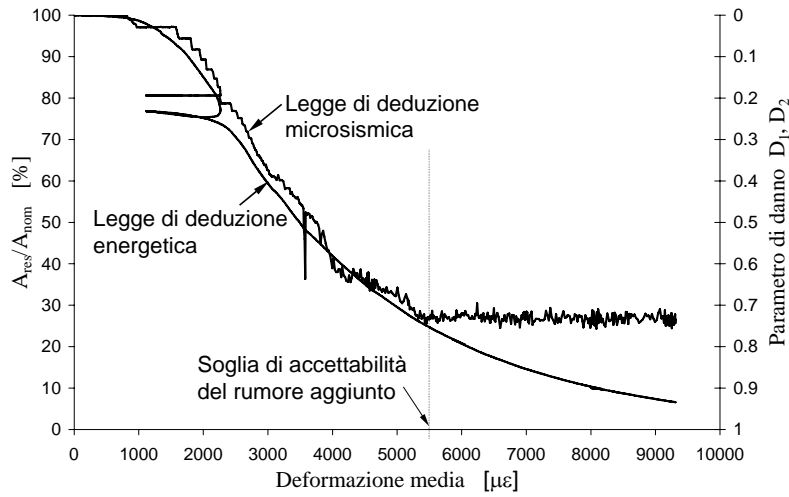


**Fig. 6** a) Set-up sperimentale per l'acquisizione di  $D_1$ ; b) Valutazione di  $W_d$  per l'acquisizione di  $D_2$

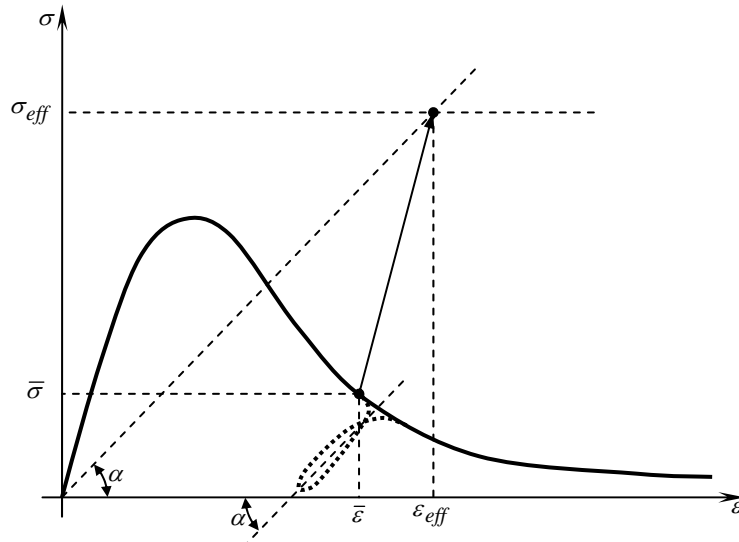
La valutazione di  $W_d$  è in accordo con la legge degli scarichi sperimentale (fig. (7)).



**Fig. 7** Legge interpolante della variazione della pendenza media dei cicli di scarico-ricarico per snellezza variabile



**Fig. 8** Confronto tra i parametri di danno  $D_1$  e  $D_2$



**Fig. 9** Determinazione di  $\varepsilon_{eff}$  a partire dal valore noto di  $\sigma_{eff}$

$D_1$  e  $D_2$  hanno fornito risultati molto prossimi tra loro fino alla soglia di accettabilità del rumore aggiunto (fig. (8)), corrispondente al valore di deformazione oltre al quale il disturbo, in termini di rumore, arrecato alla rilevazione microsismica dal propagarsi dei quadri fessurativi è tale da non poter più far apprezzare sensibili variazioni del segnale microsismico. Allo scopo di

identificare le proprietà efficaci, il solo parametro di danno adottato in tutto quanto segue è  $D_2$ , in quanto non affetto da limitazioni sul campo di rilevazione.

Per quanto riguarda il fattore di scala dell'asse  $\varepsilon$  rispetto all'asse  $v$  (fig. (4)), la deformazione efficace  $\varepsilon_{eff}$  viene identificata considerando che, in un generico ciclo di scarico-ricarico, lavorino solo le forze conservative. In altre parole, questi cicli sono caratterizzati da valori costanti di  $A_{res}$ .

In questa ipotesi, la rigidezza secante istantanea della legge  $\sigma_{eff} - \varepsilon_{eff}$ ,  $E_s = \tan \alpha$  (fig. (9)), viene assunta uguale alla pendenza media del ciclo di scarico-ricarico, effettuato per il punto corrente. Quindi, il generico punto  $\sigma_{eff} - \varepsilon_{eff}$  risulta dall'intersezione delle rette  $\sigma = \sigma_{eff}$  e  $\sigma = E_s \varepsilon$ .

In figura (9) è riportata l'identificazione della deformazione efficace  $\varepsilon_{eff}$  a partire dal valore di tensione efficace  $\sigma_{eff}$ , noto tramite le eq. (7,6) e la conoscenza della legge di danno  $D$ .

### QUESTIONI ALGEBRICHE PER I MATERIALI CON DANNO

Si è dimostrato [4] come l'adozione della formulazione di tensione efficace in eq. (7), con la specificità dell'eq. (6), porti con sé interessanti informazioni sul segno della derivata prima della tensione efficace nel piano  $\sigma_{eff} - \bar{\varepsilon}$ . Si ponga l'eq. (7) nella forma:

$$\sigma_{eff}(v) = \frac{N(v)}{A_{res}(v)}, \quad (9)$$

dove si è esplicitata la dipendenza di  $\sigma_{eff}$ ,  $A_{res}$ ,  $N$  e  $D$  dallo spostamento  $v$ . Si formi ora la derivata prima dell'eq. (9) rispetto alla variabile  $\bar{\varepsilon}$ :

$$\frac{d\sigma_{eff}}{d\bar{\varepsilon}} = \sigma'_{eff} \frac{dv}{d\bar{\varepsilon}} = H \frac{N'A_{res} - NA'_{res}}{A_{res}^2}, \quad (10)$$

nella quale l'apice indica derivazione rispetto alla variabile  $v$  e  $H$  è la base di misura delle  $\bar{\varepsilon}$ :

$$v = H\bar{\varepsilon}.$$

Per la discussione del segno dell'eq. (10), si osservi che, nelle convenzioni di fig. (4) e detto  $\hat{v}$  il valore di spostamento impresso corrispondente al carico massimo,  $N(v)|_{v=\hat{v}} = N_{max}$ , si ha che:

- $N$  è una funzione monotona crescente fino al picco ( $N' \geq 0$ ,  $0 \leq v \leq \hat{v}$ ) e monotona strettamente decrescente oltre il picco ( $N' < 0$ ,  $v > \hat{v}$ );
- $A_{res}$  è una funzione monotona decrescente su tutto il dominio ( $A'_{res} \leq 0$ ,  $\forall v$ ), potendo assumere tangente nulla solo nell'intorno dell'origine, corrispondente allo stato elastico lineare.

Per l'equazione (6), l'assunzione sulla monotonicità di  $A_{res}$  si riflette in una condizione di monotonicità per la legge di danno. In particolare, la condizione che la derivata prima di  $A_{res}$ , e quindi di  $D$ , sia non nulla al picco:

$$A'_{res}|_{v=\hat{v}} \neq 0, \quad D'|_{v=\hat{v}} \neq 0, \quad (11)$$

è validata dall'evidenza sperimentale, per la rapida evoluzione dei quadri fessurativi nell'intorno di  $v = \hat{v}$ .

Ne segue immediatamente che il segno di  $d\sigma_{eff}/d\bar{\varepsilon}$  risulta positivo per  $0 \leq v \leq \hat{v}$ :

$$\frac{d\sigma_{eff}}{d\bar{\varepsilon}} > 0 \quad 0 \leq v \leq \hat{v}. \quad (12)$$

In particolare, per  $v = \hat{v}$ , l'eq. (10) assume il valore:

$$\left. \frac{d\sigma_{eff}}{d\bar{\varepsilon}} \right|_{v=\hat{v}} = -NH \frac{A'_{res}}{A_{res}^2} > 0,$$

nella quale la disuguaglianza stretta discende dalle assunzioni in eq. (11).

Dall'equazione (12) viene un primo risultato di importanza fondamentale: al punto a tangente nulla della curva  $N-v$  ( $v = \hat{v}$ ) corrisponde un punto sulla curva  $\sigma_{eff} - \bar{\varepsilon}$  per il quale la tangente è strettamente positiva. Risultato notevole, questo, per il fatto di essere stato ricavato senza aver introdotto nessun tipo di ipotesi sulla forma della legge di danno  $D$ , a parte la condizione, fisicamente giustificabile, che essa assuma tangente non nulla in corrispondenza del carico massimo. È intuibile, e facilmente dimostrabile, come la stessa osservazione possa essere trasposta al punto corrispondente di  $N-v$  per  $v = \hat{v}$  sulla curva  $\sigma_{eff} - \varepsilon_{eff}$ .

Per quanto riguarda, invece, il segno dell'eq. (10) per  $v > \hat{v}$ , questo è determinato dal rapporto  $\rho$  tra i due termini a numeratore:

$$\rho = \frac{N'A_{res}}{NA'_{res}},$$

risultando:

$$\frac{d\sigma_{eff}}{d\bar{\varepsilon}} \geq 0 \quad \forall v > \hat{v}, 0 \leq \rho \leq 1; \quad (13')$$

$$\frac{d\sigma_{eff}}{d\bar{\varepsilon}} < 0 \quad \forall v > \hat{v}, \rho > 1. \quad (13'')$$

In alternativa alle eq. (13), si può studiare il segno per  $v > \hat{v}$  della derivata prima della grandezza  $q$ , definita come segue:

$$q = \frac{\bar{\sigma}_{max}^{(7)} A_{res}}{\sigma_{eff} A_n} \bigg/ \frac{N}{N_{max}},$$

nella quale si è esplicitata la funzione  $q$  come rapporto tra area resistente e carico normalizzati. Si ricava:

$$q' = -\bar{\sigma}_{max} \frac{\sigma'_{eff}}{\sigma_{eff}^2} = -\bar{\sigma}_{max} \frac{N'A_{res} - NA'_{res}}{N^2}. \quad (14)$$

Dall'equazione (14) si osserva che anche il segno di  $q'$  è determinato dal rapporto  $\rho$ , risultando:

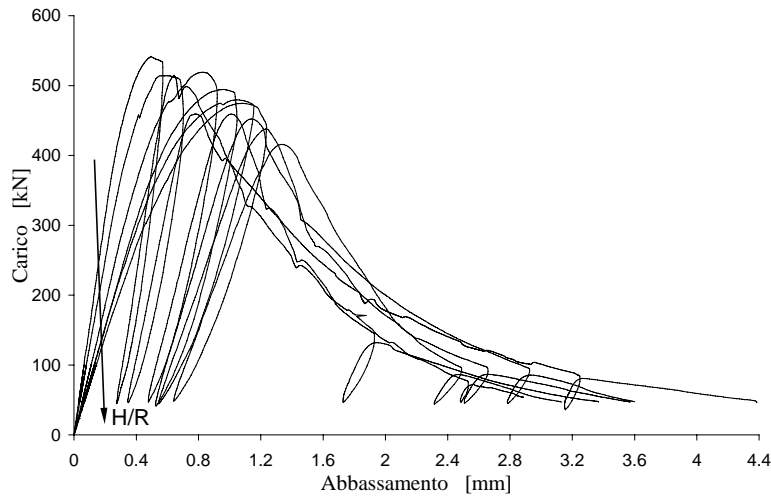
$$q' > 0 \quad \forall v > \hat{v}, \rho > 1;$$

$$q' \leq 0 \quad \forall v > \hat{v}, 0 \leq \rho \leq 1.$$

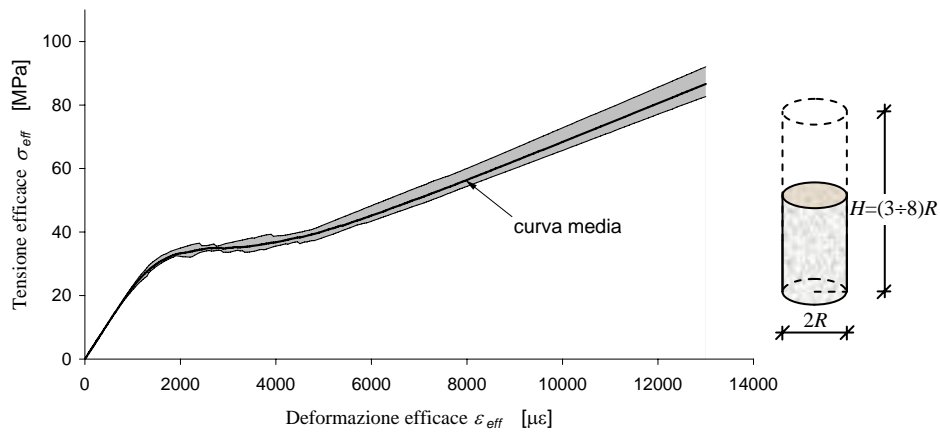
D'altra parte, ciò discende direttamente dalle eq. (13) e dalla prima uguaglianza in eq. (14), per la quale il segno di  $q'$  e il segno di  $\sigma'_{eff}$  sono discordi  $\forall v$ .

In conclusione, mentre la positività di  $d\sigma_{eff}/d\bar{\varepsilon}$  è garantita per  $0 \leq v \leq \hat{v}$ , il segno dell'eq. (10) per i punti sul ramo di softening della curva  $N-v$  è noto se è nota la legge di danno  $D$ . Anche questo risultato può essere facilmente trasposto ai punti corrispondenti di  $\sigma_{eff} - \bar{\varepsilon}$  sulla curva  $\sigma_{eff} - \varepsilon_{eff}$ .

## RISULTATI DELLA FASE DI IDENTIFICAZIONE



**Fig. 10** Effetto dimensionale della snellezza sui diagrammi carico-spostamento



**Fig. 11** Fuso di dispersione per snellezza variabile della relazione  $\sigma_{eff} / \varepsilon_{eff}$  e relativa curva media

I diagrammi  $N-v$  relativi ai 6 provini a snellezza variabile del programma sperimentale [4] sono riportati in fig. (10). L'effetto dimensionale si esplicita nel piano  $N-v$ , al crescere di  $H/R$ , sia sotto forma di decremento della tangente all'origine, sia sotto forma di decremento del carico massimo.

Le relazioni  $\sigma_{eff} - \varepsilon_{eff}$  ottenute per le 6 geometrie cadono tutte all'interno del fusso di dispersione indicato in fig. (11) con campeggiatura in grigio. Le dimensioni estremamente ridotte del fusso di dispersione garantiscono alle curve delle proprietà efficaci nel piano  $\sigma_{eff} - \varepsilon_{eff}$  l'auspicata insensibilità all'effetto dimensionale. Particolarmente interessante è osservare come tutte queste curve siano caratterizzate da andamento monotono strettamente crescente.

La forma delle curva media nel piano  $\sigma_{eff} - \varepsilon_{eff}$  è rappresentativa del comportamento del materiale alla meso-scala.

## TECNICA DI REMESHING

La modellazione della propagazione del crack attraverso una mesh non è agevole, dal momento che la geometria della mesh deve esser modificata ogni volta che il crack si propaga. Per lo studio della Meccanica della Frattura tramite Elementi Finiti (FEM) sono disponibili due diverse strategie [1]. La prima strategia descrive il crack come una brusca caduta di tensione normale, dovuta all'evoluzione del danno nel materiale. La seconda strategia rappresenta il crack come una discontinuità nel campo degli spostamenti descritta dalle componenti di spostamento delle sue facce. Molti Autori hanno sviluppato tecniche innovative per simulare la propagazione del crack

attraverso una mesh agli Elementi Finiti: meshless method, element-free Galerkin method, arbitrary local mesh replacement method, boundary element method e nodal relaxation. In particolare, il nodal relaxation può essere ottenuto in due modi diversi: con inter-element propagation, che fornisce un risultato dipendente dalla forma della mesh perché il crack viene fatto propagare lungo i lati degli elementi della mesh, e con intra-element propagation, che fornisce un risultato indipendente dalla forma della mesh in quanto la direzione di propagazione viene calcolata per mezzo di un criterio di propagazione. Il primo metodo è più veloce del secondo, dal momento che non richiede rigenerazione della mesh, ma è meno accurato.

Nell'ambito della presente Ricerca, si è scelto il secondo metodo e si è adottata una combinazione di nodal relaxation con intra-element propagation e remeshing ([1], [2]). La tecnica messa a punto è stata impiegata per implementare un codice fondato sul Metodo delle Celle [1].

## RISULTATI DELLA FASE DI MODELLAZIONE

Le figure (12÷15) mostrano la discretizzazione spaziale della sezione longitudinale e l'analisi del campo tensionale per cilindri in calcestruzzo compressi [5]. Tutte le immagini sono state generate per mezzo di tool grafici messi a punto nell'ambito della presente Ricerca.

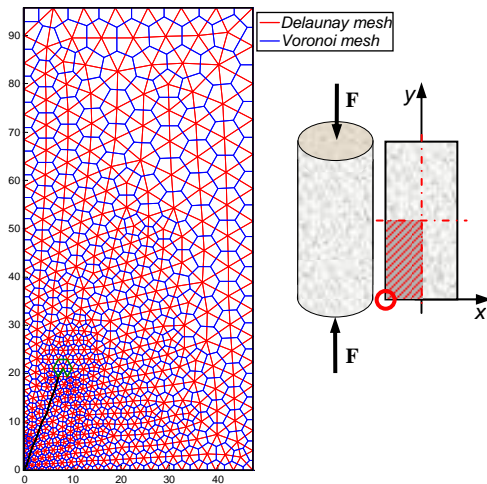


Fig. 12 Mesh di Delaunay e di Voronoi

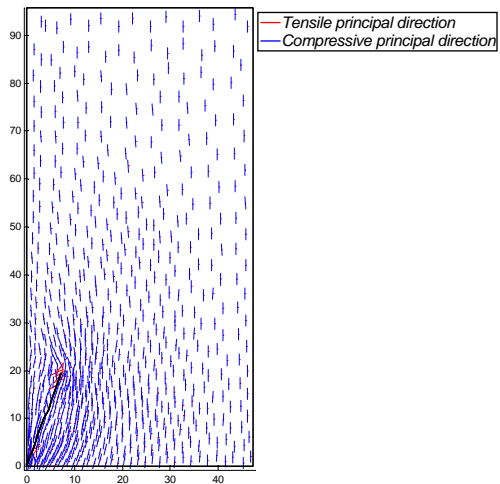


Fig. 13 Direzioni principali di tensione

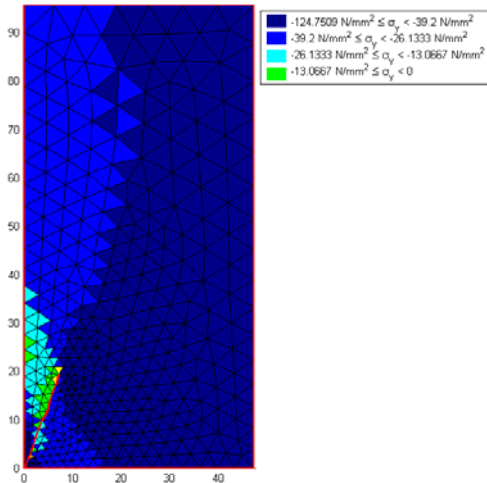


Fig. 14 Campo tensionale in direzione dell'asse y

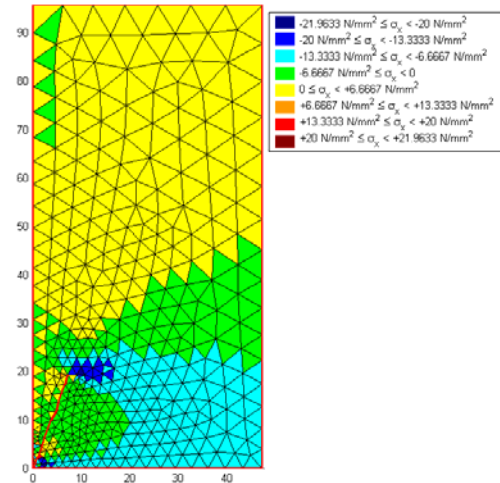
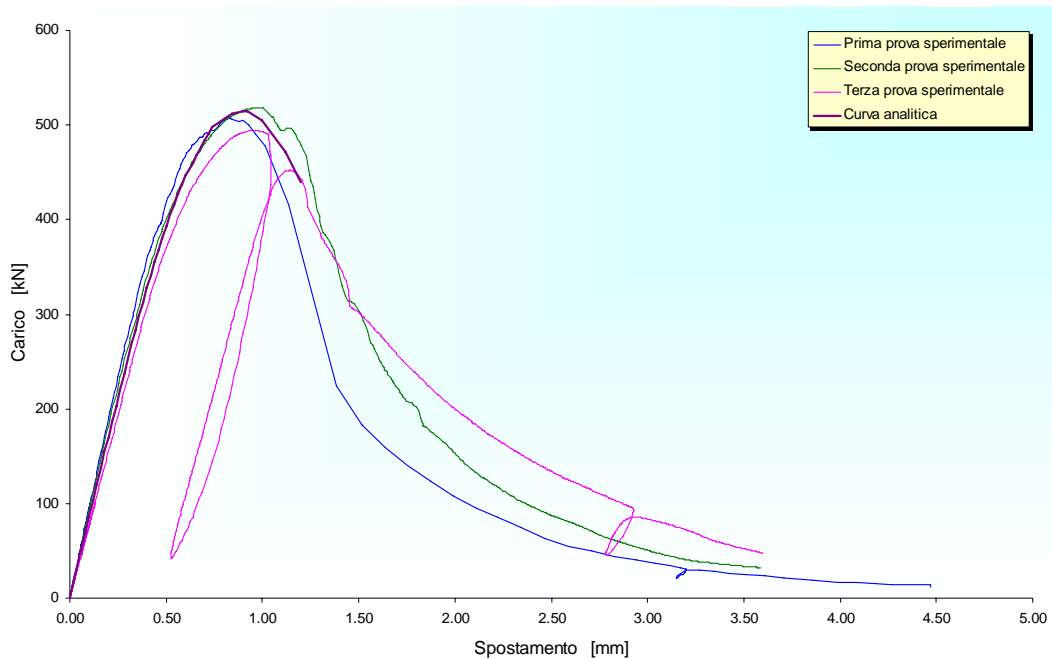


Fig. 15 Campo tensionale in direzione dell'asse x

Il legame costitutivo del calcestruzzo introdotto nel modello numerico è la legge  $\sigma_{eff} / \epsilon_{eff}$  identificata a partire dai risultati del programma sperimentale presentato, secondo il procedimento identificativo esposto. Le curve carico-spostamento numeriche sono state confrontate con le curve sperimentali dei provini a snellezza variabile, con risultati incoraggianti. Per brevità, in fig. (16) si riporta il confronto tra curva analitica e curve sperimentali per il solo cilindro tipo 4.



**Fig. 16** Cilindro tipo 4: confronto tra le curve sperimentali e la curva analitica

Come si evince dalla fig. (16), il modello analitico è in grado di tener conto della meccanica strutturale del solido cilindrico oggetto della prova meccanica. In particolare, il modello analitico è in grado di valutare il decremento di rigidità strutturale che un provino cilindrico in calcestruzzo esibisce per effetto della propagazione di un quadro fessurativo dominante. Infatti, pur avendo introdotto nel modello numerico un legame costitutivo monotono crescente, la risposta strutturale analitica presenta il tipico comportamento softening che, come ben noto, caratterizza le prove meccaniche di compressione monoassiale in controllo di spostamento su calcestruzzi.

Il fatto di riuscire ad ottenere risposte macroscopiche con softening da modelli numerici con legami costitutivi monotoni conferma le ipotesi fondanti il procedimento identificativo del legame costitutivo. Ovvero, il comportamento softening osservato sperimentalmente è caratterizzante della sola meccanica strutturale del solido di prova e non ha nessun valore costitutivo.

#### ATTIVITÀ FUTURA

- Studio approfondito delle componenti di deformazione radiale, per identificare il campo di deformazione triassiale;
- Modellazione del comportamento strutturale del solido di prova in compressione, in termini di distribuzione del campo di deformazione, e confronto con le determinazioni sperimentali;
- Modellazione dell'effetto dimensionale.

#### BIBLIOGRAFIA PRODOTTA

- [1] **Ferretti, E.**, “Crack propagation modeling by remeshing using the Cell Method (CM)”, Submitted to CMES, 2001.
- [2] **Ferretti, E.**, “Rigenerazione Automatica della Mesh per la Modellazione della Propagazione del Crack nell’ambito del Metodo delle Celle”, AIMETA 2001, Taormina (Italia), 26-29 Settembre 2001.
- [3] **Ferretti, E.**, “Identification of Constitutive Law in Mono-Axially Compressed Damaging Materials”, FDM 2001, Milan (Italy), 18-20 September 2001.
- [4] **Ferretti, E.**, “Proprietà Efficaci del Calcestruzzo in Compressione Monoassiale”, AIAS 2001, Alghero (Italia), 12-15 Settembre 2001.
- [5] **Ferretti, E.**, “A Cell Method Code for Fracture Mechanics”, Rapporto Biennale CINECA, Dicembre 2000.